La stabilité du filtre non-linéaire en temps continu

van Bien Bui

UNIVERSITÉ NICE SOPHIA ANTIPOLIS-UFR Sciences
École Doctorale Sciences Fondamentales et Appliquées

THÈSE

pour obtenir le titre de
Docteur en Sciences de l'Université Nice Sophia Antipolis

Discipline : Mathématiques

présentée et soutenue par

BUI Van Bien

La stabilité du filtre non-linéaire en temps continu

Thèse dirigée par **M. Sylvain Rubenthaler**

Soutenue le 16/02/2016

devant le jury composé de

M. Bruno RÉMILLARD	Examinateur	HEC Montréal
M. Cédric BERNARDIN	Examinateur	Nice-Sophia Antipolis
M. Éric MOULINES	Examinateur	Télécom, Paris-tech
M. François DELARUE	Examinateur	Nice-Sophia Antipolis
M. Sylvain RUBENTHALER	Directeur	Nice-Sophia Antipolis
M. Dan CRISAN	Rapporteur	Imperial College, Londres
M. Nicolas CHOPIN	Rapporteur	CREST-ENSAE

Laboratoire Jean Alexandre Dieudonné, Parc Valrose, 06108 Nice Cedex 2

Table des matières

Remerciements

Je tiens à exprimer mes plus vifs remerciements à toutes les personnes grâce à qui j'ai pu mener cette thèse à son terme. Dans la limite de mon français, il sera très difficile d'exposer toutes les gratitudes venant du fond de mon coeur.

Je voudrais tout d'abord remercier tout particulièrement M. Sylvain Rubenthaler qui a accepté de m'encadrer tout au long de ces trois années de thèse. Merci pour ce qu'il m'a appris, pour sa disposibilité, pour son enthousiasme, à toujours l'écoute de mes nombreuses questions et pour ses conseils si précieux dans la recherche. Il s'est toujours intéressé à l'évolution de mes travaux. Des nombreuses discussions que nous avons eues ainsi que des conseils qui ont pour beaucoup contribué dans le résultat final de ce travail. Je tiens donc à exprimer ma très profonde gratitude envers lui.

Mes remerciements s'adressent à M. Dan Crisan et M. Nicolas Chopin d'avoir accepté de rapporter cette thèse. Je leur suis reconnaissant, et suis honoré aussi qu'ils aient pris le temps de s'intéresser à mon travail. Ma reconnaissance s'adresse naturellement à l'ensemble de mon jury : M. Bruno Rémillard, M. Cédric Bernardin, M. Éric Moulines, M. François Delarue pour sa participation, ses commentaires utiles, ses corrections et ses suggestions qui ont ainsi apporté une certaine amélioration de ma thèse.

Je remercie à l'équipe probabilité-statitisque de m'avoir considéré comme membre entrée de leur équipe. Je voudrais réserver une attention à M. François Delarue avec qui j'ai eu la chance d'apprendre calcul stochastique, merci particulière pour conseils précieux dans la recherche.

Je remercie sincèrement Mme. Stéphanie Nivoche qui s'est montrée très gentille et sociable envers les étudiants vietnamiens et qui nous a beaucoup aidé dès que notre arrivé à Nice. Merci pour votre aide et pour vos encouragements.

C'est avec une émotion forte que j'ai apprécié l'ambiance au sein du laboratoire J.A Dieudonné où j'ai eu la chance de bénificier d'excellentes conditions de travail et d'une ambiance forte sympathique. Aussi, je profite de cette occasion pour remercier tous les membres du laboratoire, en particulier les informaticiens Jean-Marc Lacroix et Roland Ruelle qui sont très efficaces dans résolution des problèmes informatique et avec qui j'ai eu l'occasion d'apprendre le français, la guitare et surtout philosopher ensemble.

Merci à tous les thésards du laboratoire ainsi que toutes les personnes avec qui j'ai passé de bons moments de discussions, non seulement en maths mais aussi en culture et en sport. Avec qui j'ai partagé mes difficultés dans la recherche, en particulier Carole Binard et le petit groupe des gens de Maths « M.AtoZ »- Huong, Rinel, Emmanuel, Lam, Zheng Jiqiang, Byron, Tue, Giao, l'association des étudiants vietnamiens à Nice, le groupe de football nayno.

Merci à tous mes amis à Nice, en particulier la famille Chris-Thuy Ha, la famille Nam Thao, Madame Huy qui ont toujours été disponibles pour apporter leur aide, et nous aider à nous intégrer en France. Grâce à eux, ma vie en France devient beaucoup plus agréable.

Mes plus profonds remerciements vont à ma famille au Viet Nam et à mes parents. Tout au long de mes études, ils m'ont toujours soutenu, encouragé. Merci à eux de m'avoir fait confiance.

Enfin, je remercie de tout mon coeur à ma chérie Nguyen Thoa, à mon trésor Bao Long pour leur aide, leur écoute, leur soutien moral dans les moments difficiles et surtout pour leur amour.

Introduction

Le problème du filtrage consiste à estimer l'état d'un système dynamique à partir d'observations bruitées des états passés du système. Plus précisément, le but de ce problème, généralement en temps continu, est de calculer, à chaque instant t, la distribution de probabilité conditionnelle π_t de l'état X sachant les observations passées $\sigma-$ algèbre $\mathcal{Y}_t$, où : $\mathcal{Y}_t = \sigma\left(Y_s, 0 \leq s \leq t\right)$. La distribution π_t avec convention π_0 (la mesure initiale) est appelée le filtre optimal. La recherche en filtrage est motivée par de nombreuses applications dans des domaines variés telles que le pistage de cible, la commande optimale, ou l'évaluation du risque en finance ! ect. Nous mentionnons ici brièvement le contexte applicatif du filtrage.

Pistage de cible (estimation de la position d'un satellite) La modélisation de l'évolution dans le temps du mouvement du satellite s'écrit sous la forme d'un terme d'évolution déterministe et d'un terme aléatoire (à cause de l'influence de la pression de radiation, du frottement atmosphérique, de l'influence d'autres corps (lune, soleil),ect),

$$\frac{dX_t}{dt} = f\left(X_t\right) + g\left(X_t\right)\frac{dW_t}{dt}$$

Pour suivre un satellite, on dispose de n stations radar . La $i-$ième station radar reçoit une partie du signal et une autre du bruit de mesure qui est un bruit blanc,

$$y_{i,t} = h_i\left(t, X_t\right) + \eta_{i,t}, \quad 1 \leq i \leq n$$

Quand la fonction h_i est nulle, on dit que la station correspondante ne reçoit pas de signal. Le problème ici est de déterminer la position du satellite à chaque temps t. Il s'agit donc le cas du filtrage non linéaire en temps continu.

Estimation de la volatilité pour les modèles financiers
L'évolution de la volatilité peut s'écrire sous la forme, avec X_0 de loi donnée :

$$X_t = X_0 + \int_0^t f\left(X_s\right) ds + \int_0^t b\left(X_s\right) dW_s$$

Pour estimer la volatilité, nous évaluons la variation quadratique du prix du marché des instants discrets,

$$Y_n = \exp\left(\frac{X_{t_n}}{2}\right) V_n$$

ce qui est équivalante de :

$$\log Y_n^2 = X_{t_n} + \log V_n^2$$

Où $\left(W_t\right)_{t\geq 0}$ est le processus de Wiener standard et $\left(V_n\right)_{n\geq 0}$ est une suite de v.a gausiennes indépendantes et identiquement distribuées. Il s'agit de déterminer la volatilité X_{t_n} à partir d'observations bruitées $\left(\log Y_1^2, \ldots, \log Y_n^2\right)$. On tombe bien sur un problème de filtrage non linéaire et non gaussien.

Les premiers travaux sur le filtre optimal non linéaire sont dus à Ruslan L.Stratonovich ([**Str59**], [**Str60**]), Harold J.Kushner[**Kus67**] et Moshe Zakai[**Zak69**]. Ils ont introduit une dynamique simplifiée pour la loi conditionnelle non normalisée du filtre, connu comme équation de Zakai. Cependant, dans le cas général, la solution est de dimension infinie. Certaines approximations et des cas particuliers sont bien compris : par exemple, les filtres linéaires sont optimals pour les variables gausiennes, connus comme le filtre de Wiener et le filtre de Kalman-Bucy. C'est Kalman-Bucy (en 1960) qui fournit le premier algorithme de filtrage récursif permettant le calcul exact et rapide du filtre optimal, le problème est de dimension finie. Plus généralement, comme la solution est de dimension infinie, il faut des approximations en dimension finie pour mettre en oeuvre dans un ordinateur qui a la mémoire finie. Un filtre non linéraire approché de dimension finie est connu comme le filtre de Kalman étendu qui linéarise le système. Toutefois, les résultats sont mauvais lorsque le système est trop non linéaire ou lorque le filtre est mal initialisé. Une autre approche basée sur les calculs de la solution des équations du filtrage par des techniques de maillage de l'espace d'état. Néanmoins la complexité de ces méthodes augementant fortement avec la dimension de l'espace les rend inutilisables en temps réel, à partir de dimension trois. Plus récemment, les méthodes de Monte Carlo ont été utilisées dans ([**G.K96**]), grâce à leur quasi-insensibilité à la dimension de l'espace et aux non linéarités du système, leur utilisation est adaptée au filtrage non linéaire. Cependant, dans le cas de système faiblement bruités ou dehors de certaines hypothèses, ces algorithmes sont instables et divergents. En étudiant les propriétés de stabilité du filtre optimal, Del Moral et Guionnet[**MG01**] ont déduit la convergence uniforme en temps des méthodes particulaires avec interaction, sous des conditions de mélange sur le signal. Récemment, la stabilité du filtre optimal joue le rôle important dans plusieurs travaux. Plus précisément, on considère le filtre optimal $(\pi_t)_{t>0}$ avec la vraie condition initiale π_0, appelé le filtre bien initialisé. En remplaçant π_0 par une mesure de probabilité π'_0 - applée la fausse condition initiale, on calcule le filtre optimal $(\pi'_t)_{t>0}$. Le but est d'étudier dans quelle mesure la distance entre le filtre optimal π_t et le filre mal initialisé π'_t tend vers 0 , quand t tend vers l'infini. Le premier résultat de la stabilité du filtre optimal est obtenu par Ocone et Pardoux (1996) qui ont utilisé l'approximation de Kunita (1971) pour en déduire l'oubli de la condition initiale (la stabilité) au sens L^p, si le signal est ergodique. Cependant, leur méthode ne fournit aucun taux de convergence. Plus récemment, une nouvelle méthode est proposée par Atar et Zeitouni[**RO97**] et Da Prato et Al.[**GMP99**], en utilisant la métrique projective d'Hilbert pour obtenir des résultats sur la stabilité exponentielle du filtre optimal par rapport à sa condition initiale. Aussi grâce à cette métrique, Le Gland et Mevel ([**GM00**]) ont donné des résultats de stabilité en traîtant le modèle de Markov caché avec l'espace d'état qui est finie. Le résultat de Atar et Zeitouni est étendu pour le modèle de Markov caché l'espace d'état qui est polonais. La stabilité est aussi obtenue, dans le cas où l'espace d'état qui est non compact, par Atar ([**AVO99**], [**Ata98**]), Budhiraja et Ocone ([**BD97**], [**AD99**]) en proposant une nouvelle approche. Indépendament, Del Moral et Guionnet[**MG01**] ont dévéloppé une autre approximation basée sur les techniques de semi-groupe et sur le coeffient ergodique de Dobrushin pour obtenir la stabilité qui est utilisée pour montrer la convergence uniforme des méthodes particulaires avec interaction vers le filtre optimal avec taux de convergence de $\left(1/\sqrt{N}\right)^{\alpha}$, pour tout $\alpha > 1$, sous des conditions de mélange pour le noyau de transition. Cependant, la condition de mélange est une condition forte, elle n'est pas vérifié dans le cas du filtre de Kalman, on voudrait donc l'ignorer. Sous des conditions de mélange fort (moins forte que la condition de mélange) pour le noyau de transition et en supposant que l'observation est assez bonne, en utilisant la technique de robustification, F. LeGland et N. Oudjane[**LO03**] ont approximé uniformément en temps le filtre optimal par une suite de mesure de probabilité, appelée le filtre robuste, qui est stable exponentiel. L'idée de la robustification est la suivante : si on peut construire une suite de distributions de probabilité qui est à la fois stable exponentiel grâce à quelques conditions de mélange et proche du filtre optimal uniformément en temps, le filtre optimal est donc stable. Le filtre robuste est obtenu en troncature la fonction de vraisemblance, comme dans Oudjane et Rubenthaler[**OR05**]. Aussi grâce à la technique de robustification, Oudjane et Rubenthaler[**OR05**] ont montré la stabilité uniformément du filtre optimal au sens de la moyenne et ainsi qu'ils ont obtenu l'approximation uniforme en temps du filtre optimal par des systèmes particulaires avec interaction dans des cas où le signal n'est pas ergodique et au-delà de l'hypothèse de mélange fort pour le noyau de transition. Les résultats de stabilité dans les travaux au-dessus sont obtenus surtout en temps discret. Pour le temps continu, on a peu de travail théorique qui donne des conditions de stabilité. Aussi pour l'algorithme de filtrage, on sait peu de choses sur leurs qualités en temps continu. Par exemple, Hiroshi Kunita[**Kun71**] a étudié le comportement asymptotique des erreurs du filtre nonlinéraire en supposant que le processus d'état est un processus de Markov Feller avec l'espace d'état qui est compact. Il a montré que le processus à valeurs mesures constitué par le filtre optimal $(\pi_t)_{t\geq 0}$

est lui même aussi un processus de Markov Feller. En outre il montre sous certaines conditions techniques, que l'existence d'une unique mesure invariante pour le signal entraîne aussi l'existence d'une unique mesure invariante pour le filtre optimal. Cet article met l'existence d'un lien entre les propriétés ergodiques du signal et du filtre optimal, mais aucun véritable résultat de stabilité n'est pas encore prouvé. Plus récemment, A.Budhiraja[**A.B03**] a étudié les relations entre différentes propriétés asymptotiques du filtre nonlinéraire en admettant que le signal a une unique mesure de probabilité invanriante. Il adopte la possibilité de changer l'ordre des opérations d'intersection dénombrable et de maximum pour certaines tribus comme une issue centrale en étudiant le comportement asymptotique du filtre nonlinéraire. Sous certaines conditions, il montre que cette propriété est équivalente à certaines propriétés recherchées pour les filtres, telles que : (i) l'unicité de la mesure invariante du signal, (ii) l'unicité de la mesure invariante du couple (signal, filtre), (iii) une propriété de mémoire finie du filtre, (iv) une relation entre la tribu du signal et la tribu engendrée par les observation, (v) la stabilité asymptotique du filtre. Cependant, les résultats dans ces articles ne sont pas vérifiés quand le signal n'est plus ergodique.

Dans cette thèse, nous nous limiterons à considérer le filtrage de processus de diffusion en temps continu. Le but est d'étudier la stabilité du filtre optimal par rapport à sa condition initiale au-delà de l'hypothèse de mélange fort pour le noyau de transition en ignorant l'ergodicité du signal. Plus précisement, sous quelques hypothèses pour le paramètre τ dans $\mathbb{R}_+^*$, pour tout n dans $\mathbb{N}$, nous établissons la stabilité du filtre $(\pi_{n\tau})_{n\geq 0}$. L'idée pour la stabilité est basée sur l'article [**OR05**] de Oudjane et Rubenthaler, nous utilisons la technique de robustification pour construire un filtre robuste $\left(\pi^{\Delta}_{n\tau}\right)_{n\geq 0}$ qui approxime le filre optimal, en tronquant la fonction de vraisemblance par des compactes raisonnables. Pour obtenir la stabilité du filtre robuste, nous construisons une chaîne de Markov avec le noyau de transition mélangant telle que le filtre robuste peut s'écrire sous la forme d'une formule de Feynman-Kac par rapport à cette chaîne et à la fonction de vraisemblance, on obtient donc une problématique similaire à [**NMS11**]. En servant la somme téléscopique ([**OR05**], page 443), nous déduisons que le filre optimal peut s'estimer uniformément en temps par le filtre rosbuste et ainsi qu'il est stable.

La thèse s'organise de la façon suivante. Dans le premier chapitre, nous décrivons le modèle du filtrage sur lequel on travaille. Puis nous donnons une formule récursive pour le filtre optimal. Les résultats principaux de ce chapitre sont le lemme 1.3 et le lemme 1.6 .

Le deuxième chapitre a pour objet l'étude du noyau de transition et de la fonction vraisemblance étant potentiels pour le filtre optimal. Ces potentiels sont définis au chapitre précédent. Dans ce chapitre, nous donnons l'encadrement pour ses potentiels ce qui servent à obtenir la propriété de mélange et à traîter l'erreur. Nous étudions aussi le comportement asymptotique pour la fonction vraisemblance. Les résultats principaux pour ce second chapitre se trouvent dans la proposition 2.1 , le lemme 2.5 , le lemme 2.8 et la proposition 2.12 .

Le troisième chapitre est consacré à construire le filtre robuste et à établir sa stabilité. Nous construisons une chaîne de Markov non-homogène qui est mélangeante et nous donnons une nouvelle représentation du filtre robuste par rapport à la chaîne construite. Nous montrons ensuite que le filtre robuste est stable grâce à la nouvelle représentation. Les résultats principaux de ce troisième chapitre sont placés sur la proposition 3.4, la proposition 3.7 et le lemme 3.9.

Dans le chapitre 4, nous montrons que le filtre optimal peut être approximé uniformément en temps par le filtre robuste. Plus précisement, nous estimons des erreurs entre le filtre optimal et le filtre robuste, l'estimation de l'erreur locale se donne dans la proposition 4.6 et l'estimation de l'erreur globale se trouve dans la proposition 4.9. Puis au théorème 4.10, nous établissons le résultat de stabilité du filtre optimal.

CHAPITRE 1

Description du filtre optimal

1.1. Modèle et Hypothèse

Sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathbb{P}, \mathcal{F})$, soient $(V_t)_{t\geq 0}$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ deux mouvements browniens indépendants. Notons $\mathcal{F}_t$ est la filtration associée à (V_t, W_t). On suppose que processus de signal $(X_t)_{t\geq 0}$ est $\mathcal{F}_t$- adapté et déterminé sur l'espace d'état $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et qu'il satisfait une équation differentielle stochastique :

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(X_s)\, ds + V_t \tag{1.1}$$

Où X_0 est une variable dans $\mathbb{R}$ de la loi π_0.
Supposons que processus d'observation $(Y_t)_{t\geq 0}$ est $\mathcal{F}_t$- adapté, déterminé sur l'espace d'état $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ tel que :

$$Y_t = h \int_0^t X_s ds + W_t \tag{1.2}$$

Hypothèse 1. Supposons que f est C^1 et $\|f\|_\infty$, $\|f'\|_\infty$ sont bornées par une constante positive M. On suppose que $h \geq 1$.

1.2. Filtre optimal

1.2.1. Notations et Définitions. Pour étudier le filtre optimal, nous avons besoin d'introduire des notations et des définitions qui seront utilisées tout au long de ce mémoire.

- L'ensemble des mesures probabilités sur une espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ et l'ensemble des mesures non-negatives sur $(E, \mathcal{E})$ sont notés $\mathcal{P}(E)$ et $\mathcal{M}^+(E)$ respectivement.
- Pour toute fonction non-négative Ψ et mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(E)$ telles que : $\int_E \Psi(x)\, \mu(dx) > 0$, nous définissons un produit projectif $\bullet$ entre Ψ et μ :
$$\Psi \bullet \mu(dx) = \frac{\Psi(x)\, \mu(dx)}{\int_E \Psi(x)\, \mu(dx)}.$$
- Pour tout noyau K positif de E dans F et mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(E)$, définissons :
$$K\mu(dx) = \int_E \mu(dx')\, K(x', dx)$$
- Pour tout noyau K positif de E dans F et mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(E)$ telles que : $\int_F K\mu(dx) \neq 0$, définissons l'opérateur non-linéaire $\overline{K}$ sur $\mathcal{M}^+(E)$,
$$\overline{K}(\mu)(dx) = \frac{K\mu(dx)}{\int_F K\mu(dx)}$$
- Pour tous noyaux non-négatifs K_1, $K_2 \ldots$ définis sur $E_1, E_2, \ldots$, pour tout $i < j$, on définit le noyau :
$$K_{i+1:j}(x_i, dx_j) = \int_{x_{i+1}\in E_{i+1}} \cdots \int_{x_{j-1}\in E_{j-1}} K_{i+1}(x_i, dx_{i+1})\, K_{i+2}(x_{i+1}, dx_{i+2}) \ldots K_j(x_{j-1}, dx_j)$$
- Deux mesures positives $\mu, \lambda \in \mathcal{M}^+(E)$ sont comparables s'il existe deux constantes positives α, β telles que : $\alpha\lambda(A) \leq \mu(A) \leq \beta\lambda(A)$ pour tout $A \subset E$.

— **(Propriété de mélange)**. Le noyau positif K défini sur E est dit mélangeant, s'il existe une constante $1 \geq \epsilon > 0$ (constante de mélange), et une mesure positive non nulle, $\lambda \in \mathcal{M}^+(E)$, telles que :

$$\epsilon\lambda(.) \leq K(x,.) \leq \frac{1}{\epsilon}\lambda(.), \forall x \in E$$

— **(Propriété de forte mélangeante)**. Le noyau positif K défini sur E est dit fortement-mélangeant, si pour tout compact C de diamètre $\triangle$, il existe une constante $1 \geq \epsilon(\triangle) > 0$(constante de mélange), et une mesure positive non nulle, $\lambda_C \in \mathcal{M}^+(E)$, telles que

$$\epsilon(\triangle)\lambda_C(.) \leq K(x,.) \leq \frac{1}{\epsilon(\triangle)}\lambda_C(.), \forall x \in C$$

Où $\epsilon(\triangle)$ ne dépend que de l'observation Y et du diamètre $\triangle$ du compact C.

— **(Métrique de Hilbert)**. La métrique de Hilbert sur $\mathcal{M}^+(E)$ est définie par :

$$h(\mu,\mu') = \begin{cases} \log \dfrac{\sup_{A:\mu'(A)>0} \dfrac{\mu(A)}{\mu'(A)}}{\inf_{A:\mu'(A)>0} \dfrac{\mu(A)}{\mu'(A)}}, & si\, \mu\, et\, \mu'\, sont\, deux\, mesures \\ non\, nulles\, comparables, & \\ 0, & si\, \mu = \mu' \equiv 0, \\ +\infty, & dans\, les\, autre\, cas. \end{cases}$$

— **(Variation totale)**. Pour toutes mesures signées μ et $\mu' \in \mathcal{M}^+(E)$, nous appelons *variation totale* entre μ et μ', le réel :

$$\|\mu - \mu'\|_{VT} = 2\sup_A \mid \mu(A) - \mu'(A) \mid,$$

Où le *sup* est pris parmi tous les boréliens A de E. On peut montrer :

$$\|\mu - \mu'\|_{VT} = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} \left| \int f(x)\mu(dx) - \int f(x)\mu'(dx) \right|$$

— **(Taux de contraction sous la variation totale)**. Soit K un noyau markovien de E dans F et soit μ une mesure dans $\mathcal{M}^+(E)$. Nous appelons *taux de contraction* de K pour la variation totale et notons $\beta(K)$, le réel compris entre 0 et 1 tel que :

$$\beta(K) = \sup_{\mu(E)=0} \frac{\|K\mu\|_{VT}}{\|\mu\|_{VT}},$$

Où le *sup* est pris parmi les mesures finies signées non nulles.

— **(Taux de contraction de Birkhoff)**. Soit K un noyau markovien de E dans F et soit μ une mesure dans $\mathcal{M}^+(E)$. Nous appelons *taux de contraction de Birkhoff* de K pour la métrique de Hilbert et notons $\tau(K)$, le réel compris entre 0 et 1 tel que :

$$\tau(K) = \sup_{0<h(\mu,\mu')<\infty} \frac{h(K\mu, K\mu')}{h(\mu,\mu')},$$

Où le *sup* est pris entre les mesures μ et μ' positives et non nulles.

1.2.2. Problème de filtrage. Le problème de filtrage non-linéaire est de calculer à chaque pas de temps la loi conditionnelle π_t de l'état X_t sachant qu'une réalisation des observations $\mathcal{F}_t^Y = \sigma(Y_s, 0 \leq s \leq t)$ jusqu'à l'instant courant t, *i.e* :

$$\pi_t(dx) = \mathbb{P}\left(X_t \in dx \mid \mathcal{F}_t^Y\right)$$

La suite de probabilités conditionnelles $(\pi_t)_{t\geq 0}$ avec la convention π_0, est appelée *filtre optimal.* Dans ce mémoire, on se concentrera d'étudier le filtre optimal $(\pi_{n\tau})_{n\geq 0}, n \in \mathbb{N}$, où $\tau > 0$, un paramètre dont la condition va être ajoutée plus tard.

1.2.3. Notes sur la formule de Feynman-Kac et le filtre optimal. Dans cette subsection, nous remarquons que le filtre optimal peut s'exprimer comme la loi marginale d'une chaîne de Markov. Soit $(\mathfrak{X}_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov prenant les valeurs dans les espaces mesurables $E_0, E_1 \ldots$, avec les noyaux de transition $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, …(cette chaîne peut être non-homogène). On suppose que, pour tout k, $\mathfrak{Q}_k$ est ϵ_k-mélangeant. Soient $\Psi_1 : E_1 \to \mathbb{R}_+$, $\Psi_2 : E_2 \to \mathbb{R}_+$, … les fonctions mesurables dans $\mathbb{R}_+$ et soit η_0 une mesure de probabilité sur E_0. On s'intéresse à une suite de mesure probabilité $(\eta_k)_{k\geq 1}$ sur $E_1, E_2 \ldots$ respectivement, qui est définie par :

$$\forall k \geq 1\,,\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_b^+(E_k)\,,\ \eta_k(\varphi) = \frac{\mathbb{E}_{\eta_0}(\varphi(\mathfrak{X}_k)\prod_{1\leq i\leq k}\Psi_i(\mathfrak{X}_i))}{\mathbb{E}_{\eta_0}(\prod_{1\leq i\leq k}\Psi_i(\mathfrak{X}_i))}\,, \tag{1.3}$$

Où la notation $\mathbb{E}_{\eta_0}$ signifie que l'on prend l'espérance en sachant la loi de $\mathfrak{X}_0$ est η_0. Les mesures $(\eta_k)_{k\geq 0}$ sont appelées une suite de mesure Feynman-Kac sur $(E_k)_{k\geq 0}$ basée sur les noyaux de transition $(\mathfrak{Q}_k)_{k\geq 1}$, les potentiels $(\Psi_k)_{k\geq 1}$ et la mesure initiale η_0. Pour tout k, si la fonction Ψ_k est la fonction de vraisemblance associée à l'observation d'une chaîne de Markov avec les noyaux de transition $\mathfrak{Q}_1$, $\mathfrak{Q}_2$, … et la loi initiale η_0, alors la suite $(\eta_k)_{k\geq 0}$ devient le filtre optimal. Supposons qu'on a une autre mesure initiale η_0', on pose :

$$\forall k \geq 1\,,\ \forall \varphi \in \mathcal{C}_b^+(E_k)\,,\ \eta_k'(\varphi) = \frac{\mathbb{E}_{\eta_0'}(\varphi(\mathfrak{X}_k)\prod_{1\leq i\leq k}\Psi_i(\mathfrak{X}_i))}{\mathbb{E}_{\eta_0'}(\prod_{1\leq i\leq k}\Psi_i(\mathfrak{X}_i))}\,.$$

On s'intéresse sur la différence entre η_k et η_k' . Fixons $n \geq 1$, on aimerait exprimer η_n comme la loi marginale d'une chaîne de Markov. Nous utilisons l'idée dans [**MG01**]. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, posons :

$$\mathfrak{R}_k(x, dx') = \Psi_k(x')\mathfrak{Q}_k(x, dx')\,,$$

et pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, définissons:

$$\Psi_{n|k}(x) = \int_{x_{k+1}\in E_{k+1}} \cdots \int_{x_n\in E_n} \mathfrak{R}_{k+1}(x, dx_{k+1}) \prod_{k+2\leq i\leq n} \mathfrak{R}_i(x_{i-1}, dx_i)\,.$$

Si $k = n$, on définit $\Psi_{n|n}(x) = 1$. Pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, on pose:

$$\mathfrak{S}_{n|k}(x, dx') = \frac{\Psi_{n|k+1}(x')}{\Psi_{n|k}(x)}\mathfrak{R}_{k+1}(x, dx')\,.$$

A partir de [**MG01**], nous avons le résultat suivant (une démonstration simple peut se trouver dans [**OR05**], proposition 3.1).

Proposition 1.1. *Les opérateurs $(\mathfrak{S}_{n|k})_{0\leq k\leq n-1}$ sont markoviens. Pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $\mathfrak{S}_{n|k}$ est ϵ_{k+1}-mélangeant. Nous avons :*

$$\eta_n = \mathfrak{S}_{n|n-1}\mathfrak{S}_{n|n-2}\ldots\mathfrak{S}_{n|0}(\Psi_{n|0}\bullet\eta_0)\,,$$
$$\eta_n' = \mathfrak{S}_{n|n-1}\mathfrak{S}_{n|n-2}\ldots\mathfrak{S}_{n|0}(\Psi_{n|0}\bullet\eta_0')\,,$$

Et

$$\|\eta_n - \eta_n'\| \leq \prod_{1\leq k\leq n}(1-\epsilon_k^2) \times \|\Psi_{n|0}\bullet\eta_0 - \Psi_{n|0}\bullet\eta_0'\|\,.$$

Grâce aux calculs dans [**OR05**], page 434, nous pouvons borner :

$$\|\Psi_{n|0}\bullet\eta_0 - \Psi_{n|0}\bullet\eta_0'\| \leq 2\inf\left(1, \frac{\|\Psi_{n|0}\|_\infty}{\langle\eta_0, \Psi_{n|0}\rangle}\|\eta_0-\eta_0'\|\right)\,. \tag{1.4}$$

Pour tout x dans E_0,

$$\begin{aligned}\frac{\Psi_{n|0}(x)}{\langle\eta_0, \Psi_{n|0}\rangle} &= \frac{\int_{z\in E_1}\mathfrak{R}_{2:n}(z, E_n)\mathfrak{R}_1(x, dz)}{\int_{y\in E_0}\int_{z\in E_1}\mathfrak{R}_{2:n}(z, E_n)\mathfrak{R}_1(y, dz)\eta_0(dy)} \\ &\leq \frac{\int_{z\in E_1}\mathfrak{R}_{2:n}(z, E_n)\frac{1}{\epsilon_1}\lambda_1(dz)}{\int_{z\in E_1}\mathfrak{R}_{2:n}(z, E_n)\epsilon_1\lambda_1(dz)} = \frac{1}{\epsilon_1^2}\,. \end{aligned} \tag{1.5}$$

On parle de la stabilité du filtre optimal si :

$$\lim_{n\to\infty} \|\eta_n - \eta'_n\|_{VT} = 0$$

Il existe une version en temps continu pour la formule de Feynman-Kac et ainsi pour le filtre optimal. Nous en donnons ici une version simplifiée. On considère un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ dans un espace E de la loi initiale η_0, et un processus d'observation $(Y_t)_{t\geq 0}$ dans $\mathbb{R}^d$ sous la forme :

$$Y_t = \int_0^t h(X_s)\, ds + W_t$$

avec $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$. Pour tout $t \geq 0$, pour toute fonction test f, pour tout processus $(U_t)_{t\geq 0}$ qui a la même loi que $(X_t)_{t\geq 0}$, définissons les mesures :

$$\gamma_t(f) = \mathbb{E}_{\eta_0}\left(f(U_t) \exp\left(\int_0^t h(U_s)\, dY_s - \int_0^t \|h(U_s)\|^2 ds \right)\right)$$

$$\eta_t(f) = \frac{\gamma_t(f)}{\gamma_t(1)}$$

La mesure γ_t est appellée la mesure de Feynman-Kac non-normalisés et la mesure η_t est appellée la mesure de Feynman-Kac normalisée. Grâce au théorème de Girsanov, nous pouvons montrer que le filtre optimal (en temps continu) peut s'exprimer en terme d'une mesure de Feynman-Kac :

$$\mathcal{L}_{\eta_0}\left(X_t \mid (Y_s)_{0\leq s\leq t}\right) = \eta_t$$

Supposons que l'on a une autre mesure initiale η'_0, notons η'_t est une mesure de Feynman-Kac par rapport à la mesure initiale η'_0. On parle de la stabilité en temps continu, si :

$$\lim_{t\to\infty} \|\eta_t - \eta'_t\|_{VT} = 0$$

1.2.4. La représentation du filtre optimal. Dans cette subsection, nous allons montrer que le filtre optimal peut s'exprimer en récursion. Soit $\hat{V} = \left\{\hat{V}_t, t \geq 0\right\}$ processus aléatoire définit par :

$$\hat{V}_t = V_t + \int_0^t f(X_s)\, ds, \qquad t \geq 0.$$

A partir de [**BC09**] (Chapitre 6, Section 6.1), on définit la nouvelle probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ telle que :

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}} |_{\mathcal{F}_t} = \hat{Z}_t = \exp\left(\int_0^t f(X_s)\, d\hat{V}_s - \frac{1}{2}\int_0^t f^2(X_s)\, ds + h\int_0^t X_s dY_s - \frac{h^2}{2}\int_0^t X_s ds \right)$$

Proposition 1.2. *Sous la probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ nous avons :*$\left(\hat{V}, Y\right) = \left\{\left(\hat{V}_t, Y_t\right)\right\}_{t\geq 0}$ *est un mouvement brownien de deux dimensions, $X \perp\!\!\!\perp Y$ et $X_t = X_0 + \hat{V}_t$.*

Démonstration. Voir [**BC09**]- page 143. □

Pour tous $0 \leq s < \tau$ et $n \geq 1$, notons : $Y_{s:\tau} \triangleq (Y_u)_{s\leq u\leq \tau}$. On suppose que Y est fixé, pour tout $(x_0, x_1) \in E^2$, définissons la fonction de vraisemblance :

$$\psi\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}, x_0, x_1\right) = \frac{\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\left.\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_{[(n-1)\tau:n\tau]}} \middle| X_{(n-1)\tau} = x_0, X_{n\tau} = x_1, Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right)}{\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\left.\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_{[(n-1)\tau:n\tau]}} \middle| X_{(n-1)\tau} = x_0, X_{n\tau} = x_1\right)} \tag{1.6}$$

Le lemme suivant montre que la loi de $Y_{(n-1)\tau:n\tau}$ conditionné sur $\left(X_{(n-1)\tau}, X_{n\tau}\right)$ possède la fonction ψ comme la densité par rapport à une mesure de Wiener.

LEMME 1.3. *Pour tout $k \geq 1$,*

$$\mathbb{P}\left(Y_{(k-1)\tau:k\tau} \in dy \mid X_{(k-1)\tau}, X_{k\tau}\right) = \psi\left(Y_{(k-1)\tau:k\tau} = y, X_{(k-1)\tau}, X_{k\tau}\right) \hat{\lambda}_{k\tau}(dy)$$

Où $\left(\hat{\lambda}_{k\tau}\right)_{k\geq 1}$ mesure de Wiener.

DÉMONSTRATION. Il nous suffit de montrer ce lemme dans le cas où $k = 1$. Notons que $\mathcal{C}[0,\tau]$ est l'ensemble des fonctions continues de $[0,\tau]$ vers $\mathbb{R}$. Pour toute fonction test ϕ dans $\mathcal{C}[0,\tau]$, en utilisant la formule Kallianpur-Striebel, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\phi\left(Y_{0:\tau}\right) \mid X_0, X_\tau\right) &= \frac{\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\phi\left(Y_{0:\tau}\right) \left.\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_\tau} \middle| X_0, X_\tau\right)}{\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\left.\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_\tau} \middle| X_0, X_\tau\right)} \\
&= \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\phi\left(Y_{0:\tau}\right) \frac{\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\left.\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_\tau} \middle| X_0, X_\tau, Y_{0:\tau}\right)}{\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\left.\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_\tau} \middle| X_0, X_\tau\right)} \middle| X_0, X_\tau\right)
\end{aligned}$$

Par la proposition 1.2, nous avons $\left(\hat{V}, Y\right) = \left\{\left(\hat{V}_t, Y_t\right)\right\}_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien de deux dimensions. Donc, conditionement sur X_0, X_τ, la loi de $Y_{0:\tau}$ sous $\mathbb{P}$ a la densité suivante par rapport à une mesure de Wiener :

$$y_{0:\tau} \mapsto \psi(Y_{0:\tau} = y_{0:\tau}, X_0, X_\tau) := \frac{\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\left.\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_\tau} \middle| X_0, X_\tau, Y_{0:\tau} = y_{0:\tau}\right)}{\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\left.\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_\tau} \middle| X_0, X_\tau\right)}$$

□

Pour tous $\tau > 0, n \geq 1$, le filtre optimal de couple $\left(\left(X_{(n-1)\tau}, X_{n\tau}\right)\right)_{n\geq 1}$ avec la mesure initiale μ_0 , est défini par :

$$\mu_{n\tau}(dx') = \mathbb{P}\left(\left(X_{(n-1)\tau}, X_{n\tau}\right) \in dx' \mid Y_{0:n\tau}\right) \tag{1.7}$$

Notons $\widetilde{Q}$ le noyau de transition de la chaîne Markov $\left(\left(X_{(n-1)\tau}, X_{n\tau}\right)\right)_{n\geq 1}$ et Q est le noyau de transition de la chaîne de Markov $(X_{n\tau})_{n\geq 0}$. La relation entre ses deux noyaux est présentée par le lemme suivant

LEMME 1.4. *Pour tous $x = (x_1, x_2), x' = (x_1', x_2') \in \mathbb{R}^2$,*

$$\widetilde{Q}(x_1, x_2, dx_1', dx_2') = Q(x_1', dx_2')\, \delta_{x_2}(dx_1')$$

Où δ_{x_2} est la mesure de Dirac au point x_2.

DÉMONSTRATION. Pour tous $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}$, nous considérons:

$$\widetilde{Q}(x_1, x_2, A_1, A_2) = \mathbb{P}\left(X_{n\tau} \in A_1, X_{(n+1)\tau} \in A_2 \mid X_{(n-1)\tau} = x_1, X_{n\tau} = x_2\right)$$

Si $x_2 \notin A_1$, nous obtenons:

$$\widetilde{Q}(x_1, x_2, A_1, A_2) = 0$$

Si $x_2 \in A_1$, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
\widetilde{Q}(x_1, x_2, A_1, A_2) &= \mathbb{P}\left(X_{(n+1)\tau} \in A_2 \mid X_{(n-1)\tau} = x_1, X_{n\tau} = x_2\right) \\
&= \mathbb{P}\left(X_{(n+1)\tau} \in A_2 \mid X_{n\tau} = x_2\right) = Q(x_2, A_2)
\end{aligned}$$

□

En utilisant lemme 1.3 , le filtre optimal de couple peut s'exprimer par une mesure Feynman-Kac basé sur la transition $\widetilde{Q}\left(x, dx'\right)$ et les potentiels $\psi_{n\tau}\left(.\right) \triangleq \psi\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}, .\right)$, c'est à dire on peut exprimer $\left(\mu_{n\tau}\right)_{n\geq 1}$ par le schéma suivant :

$$\mu_{(n-1)\tau} \xrightarrow[Prédiction]{} \mu_{n\tau|(n-1)\tau} = \widetilde{Q}\mu_{(n-1)\tau} \xrightarrow[Correction]{} \mu_{n\tau} = \psi_{n\tau} \bullet \mu_{n\tau|(n-1)\tau} \tag{1.8}$$

Remarque 1.5. Notons que $\int_{\mathbb{R}^2} \psi_{n\tau}\left(x\right) \mu_{n\tau|(n-1)\tau}\left(dx\right)$ est positive $p.s.$ En effet

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau} \in dy \mid Y_{0:(n-1)\tau}\right) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbb{P}\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau} \in dy \mid \left(X_{(n-1)\tau}, X_{n\tau}\right) = x\right) \\ &\quad \times \mathbb{P}\left(\left(X_{(n-1)\tau}, X_{n\tau}\right) \in dx \mid Y_{0:(n-1)\tau}\right) \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^2} \psi_{n\tau}\left(y, x\right) \mu_{n\tau|(n-1)\tau}\left(dx\right)\right) \hat{\lambda}_{n\tau}\left(dy\right) = l_{n\tau}\left(y\right) \hat{\lambda}_{n\tau}\left(dy\right)\end{aligned}$$

Où :

$$l_{n\tau}\left(y\right) = \int_{\mathbb{R}^2} \psi_{n\tau}\left(x\right) \mu_{n\tau|(n-1)\tau}\left(dx\right)$$

Alors

$$\mathbb{P}\left[\int_{\mathbb{R}^2} \psi_{n\tau}\left(x\right) \mu_{n\tau|(n-1)\tau}\left(dx\right) = 0 \mid Y_{0:(n-1)\tau}\right] = \int_{\{l_{n\tau}(y)=0\}} l_{n\tau}\left(y\right) \hat{\lambda}_{n\tau}\left(dy\right) = 0$$

Pour tous $x = \left(x_1, x_2\right), x' = \left(x_1', x_2'\right) \in \mathbb{R}^2$, $n \geqslant 1, \tau > 0$, notons :

$$T_{n\tau}\left(x, dx'\right) = \psi_{n\tau}\left(x'\right) \widetilde{Q}\left(x, dx'\right)$$

Le filtre optimal de couple peut s'exprimer en récursion :

$$\mu_{n\tau} = \overline{T}_{n\tau}\left(\mu_{(n-1)\tau}\right) = \ldots = \overline{T}_{n\tau:m\tau}\left(\mu_{m\tau}\right) \tag{1.9}$$

Le filtre optimal $\left(\pi_{n\tau}\right)_{n\geq 0}, n \in \mathbb{N}$ peut être regardé comme la marginale du filtre $\left(\mu_{n\tau}\right)_{n\geq 0}, n \in \mathbb{N}$, c'est à dire :

$$\pi_{n\tau}\left(dx'\right) = \mu_{n\tau}\left(\mathbb{R}, dx'\right) = \int_{x\in\mathbb{R}} \mu_{n\tau}\left(dx, dx'\right) \tag{1.10}$$

Notons que, pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R})$,

$$\widetilde{Q}\mu(dx, dx') = \mu(dx)Q(x, dx')\,, \forall x, x' \in \mathbb{R}$$

Grâce à la représentation (1.10), nous avons le résultat suivant :

Lemme 1.6. *Pour tout* $\left(x_1, x_2\right) \in \mathbb{R}^2$*, notons* R_n *un noyau non-négatif défini sur* $\mathbb{R} \times \mathcal{B}\left(\mathbb{R}\right)$ *tel que* $R_n\left(x_1, dx_2\right) = \psi_{n\tau}\left(x_1, x_2\right) Q\left(x_1, dx_2\right)$*. Nous avons :*

$$\pi_{n\tau} = \overline{R}_n\left(\pi_{(n-1)\tau}\right) \tag{1.11}$$

Et,

$$\mu_{n\tau|(n-1)\tau}\left(dx, dx'\right) = \widetilde{Q}\pi_{(n-1)\tau}\left(dx, dx'\right) \tag{1.12}$$

Démonstration. Grâce aux (1.8), (1.10) et lemme 1.4, nous avons :

$$\begin{aligned}\pi_{n\tau}\left(dx'\right) &= \int_{y\in\mathbb{R}} \mu_{n\tau}\left(dy, dx'\right) = \int_{y\in\mathbb{R}} \frac{\psi_{n\tau}\left(y, x'\right) \mu_{n\tau|(n-1)\tau}\left(dy, dx'\right)}{\int_{y,x'} \psi_{n\tau}\left(y, x'\right) \mu_{n\tau|(n-1)\tau}\left(dy, dx'\right)} \\ &= \int_{y\in\mathbb{R}} \frac{\psi_{n\tau}\left(y, x'\right) \int_{y',x} \mu_{(n-1)\tau}\left(dy', dx\right) \widetilde{Q}\left(y', x, dy, dx'\right)}{\int_{y,x'} \psi_{n\tau}\left(y, x'\right) \int_{y',x} \mu_{(n-1)\tau}\left(dy', dx\right) \widetilde{Q}\left(y', x, dy, dx'\right)} \\ &= \int_{y\in\mathbb{R}} \frac{\psi_{n\tau}\left(y, x'\right) \int_{y',x} \mu_{(n-1)\tau}\left(dy', dx\right) Q\left(y, dx'\right) \delta_x\left(dy\right)}{\int_{y,x'} \psi_{n\tau}\left(y, x'\right) \int_{y',x} \mu_{(n-1)\tau}\left(dy', dx\right) Q\left(y, dx'\right) \delta_x\left(dy\right)} \\ &\overset{Fubini}{=} \frac{\int_{y',x} \psi_{n\tau}\left(x, x'\right) Q\left(x, dx'\right) \mu_{(n-1)\tau}\left(dy', dx\right)}{\int_{x,x',y'} \psi_{n\tau}\left(x, x'\right) Q\left(x, dx'\right) \mu_{(n-1)\tau}\left(dy', dx\right)}\end{aligned}$$

$$= \frac{\int_x \psi_{n\tau}(x,x')\, Q(x,dx')\, \pi_{(n-1)\tau}(dx)}{\int_{x,x'} \psi_{n\tau}(x,x')\, Q(x,dx')\, \pi_{(n-1)\tau}(dx)} = \overline{R}_n\left(\pi_{(n-1)\tau}\right)(dx')$$

Maintenant, nous allons montrer (1.12). Pour tous α et β dans $\mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\exp\left(i\alpha X_{(n-1)\tau} + i\beta X_{n\tau}\right) \mid Y_{0:(n-1)\tau}\right) \\
&\quad = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(i\alpha X_{(n-1)\tau} + i\beta X_{n\tau}\right)\right) \mid X_{0:(n-1)\tau}, W_{0:(n-1)\tau} \mid Y_{0:(n-1)\tau}\right) \\
&\quad = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\exp\left(i\alpha X_{(n-1)\tau} + i\beta X_{n\tau}\right)\right) \mid X_{0:(n-1)\tau} \mid Y_{0:(n-1)\tau}\right) \\
&\quad = \mathbb{E}\left(\exp\left(i\alpha X_{(n-1)\tau}\right) \mathbb{E}\left(\exp\left(i\beta X_{n\tau}\right)\right) \mid X_{(n-1)\tau} \mid Y_{0:(n-1)\tau}\right) \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(i\alpha x + i\beta x'\right) \pi_{(n-1)\tau}(dx)\, Q(x,dx') \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(i\alpha x + i\beta x'\right) \widetilde{Q}\pi_{(n-1)\tau}(dx,dx')
\end{aligned}$$

En utilisant le théorème de l'approximation de Weierstrass pour toute fonction complexe borné, continue. Pour toute fonction test g sur $\mathbb{R}^2$, nous avons :

$$g\left(X_{(n-1)\tau}, X_{n\tau}\right) = \lim_{r\to\infty} g^{(r)}\left(X_{(n-1)\tau}, X_{n\tau}\right)$$

Où :

$$g^{(r)}\left(X_{(n-1)\tau}, X_{n\tau}\right) = \sum_{k=1}^{m_r} a_k^r \exp\left(i\beta_{k,1}^r X_{(n-1)\tau} + i\beta_{k,2}^r X_{n\tau}\right)$$

Donc, l'égalité suivante aboutit à la démonstration de (1.12) :

$$\mathbb{E}\left(g\left(X_{(n-1)\tau}, X_{n\tau}\right) \mid Y_{0:(n-1)\tau}\right) = \int_{\mathbb{R}^2} g(x,x')\, \widetilde{Q}\pi_{(n-1)\tau}(dx,dx')$$

$\square$

CHAPITRE 2

Traitement du noyau de transition et de la fonction vraisemblance

Suite au chapitre 1, le filtre optimal $\pi_{n\tau}$ peut s'exprimer comme une mesure Feynman-Kac basé sur le noyau de transition Q et les potentiels $\psi_{n\tau}$. Il est donc nécessaire d'étudier les propriétés concernant ces termes. Dans ce chapitre, nous allons estimer le noyau de transition et la fonction de vraisemblance. Ces estimations servent à obtenir les propriétés mélangantes que l'on verra dans les chapitres qui viennent.

2.1. Estimation du noyau de transition

Pour tout $\tau > 0$, rappelons que $Q(x, dx')$ est noté pour le noyau de transition de la chaîne Markov $(X_{n\tau})_{n\geq 0}$. Nous avons le lemme suivant.

PROPOSITION 2.1. *Pour tous $x, x' \in \mathbb{R}$, $Q(x, dx')$ a une densité $Q(x, x')$ par rapport à la mesure de Lebesgue et*

$$\begin{cases} Q(x,x') & \leq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\dfrac{(x'-x)^2}{2\tau} + M|x'-x| + \dfrac{\tau M}{2}\right) \\ \\ Q(x,x') & \geq \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\dfrac{(x'-x)^2}{2\tau} - M|x'-x| - \dfrac{\tau M(M+1)}{2}\right) \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Nous définissons une nouvelle mesure de probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ par:

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\widetilde{\mathbb{P}}}\bigg|_{\mathcal{F}_\tau} = \exp\left(\int_0^\tau f(X_s)d\widehat{V}_s - \frac{1}{2}\int_0^\tau f^2(X_s)ds\right). \tag{2.1}$$

Où:

$$\hat{V}_t = V_t + \int_0^t f(X_s)\,ds, \qquad t \geq 0.$$

A partir du théorème de Girsanov, $\widehat{V}$ est un mouvement Brownien standard sous $\widetilde{\mathbb{P}}$. Nous posons F une primitive de f. Nous avons:

$$\begin{aligned} \int_0^\tau f(X_s)d\widehat{V}_s - \frac{1}{2}\int_0^\tau f^2(X_s)ds &= \int_0^\tau f(X_s)dX_s - \frac{1}{2}\int_0^\tau f^2(X_s)ds \\ &= F(X_\tau) - F(X_0) - \frac{1}{2}\int_0^\tau f'(X_s)ds - \frac{1}{2}\int_0^\tau f^2(X_s)ds \\ &\geq -M|X_\tau - X_0| - \frac{\tau M(M+1)}{2} \end{aligned}$$

Et,

$$\int_0^\tau f(X_s)d\widehat{V}_s - \frac{1}{2}\int_0^\tau f^2(X_s)ds \quad \leq \quad M|X_\tau - X_0| + \frac{\tau M}{2}$$

Donc, pour toute fonction test φ,

$$\mathbb{E}(\varphi(X_\tau)) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\varphi(X_\tau)) = \mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\varphi(X_\tau)\,\frac{d\mathbb{P}}{d\widetilde{\mathbb{P}}}\bigg|_{\mathcal{F}_\tau}\right)$$

$$\geq \mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\varphi(X_\tau)\exp\left(-M|X_\tau - X_0| - \frac{\tau M\,(M+1)}{2}\right)\right).$$

$$\mathbb{E}(\varphi(X_\tau)) \quad \leq \quad \mathbb{E}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\varphi(X_\tau)\exp\left(M|X_\tau - X_0| + \frac{\tau M}{2}\right)\right).$$

□

2.2. La fonction de vraisemblance

Rappelons que la fonction de vraisemblance est définie par:

$$\psi\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}, x_0, x_1\right) = \frac{\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\left.\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_{[(n-1)\tau:n\tau]}}\middle| X_{(n-1)\tau} = x_0, X_{n\tau} = x_1, Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right)}{\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\left.\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_{[(n-1)\tau:n\tau]}}\middle| X_{(n-1)\tau} = x_0, X_{n\tau} = x_1\right)}$$

Pour tout $n \geq 1, (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^2$, définissons :

$$\widehat{\psi}(Y_{(n-1)\tau:n\tau}, x_0, x_1) \triangleq \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\Bigg(\exp\left(h\int_{(n-1)\tau}^{n\tau} X_s dY_s - \frac{h^2}{2}\int_{(n-1)\tau}^{n\tau} X_s^2 ds\right)$$
$$|X_{(n-1)\tau} = x_0, X_{n\tau} = x_1, Y_{(n-1)\tau:n\tau}\Bigg)$$

Nous allons d'abord donner une formule explicite pour $\widehat{\psi}$.

2.2.1. Calculs de $\widehat{\psi}$. Pour tout $(x, z) \in \mathbb{R}^2$, nous allons calculer :

$$\widehat{\psi}(Y_{0:\tau}, x, z) \triangleq \mathbb{E}^{\widehat{\mathbb{P}}}\left(\exp\left(h\int_0^\tau X_s dY_s - \frac{h^2}{2}\int_0^\tau X_s^2 ds\right)\middle| X_0 = x, X_\tau = z, Y_{0:\tau}\right)$$

Sous la probabilité $\hat{\mathbb{P}}$, $(X_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien. Donc, en utilisant le pont brownien, nous pouvons écrire $\widehat{\psi}$ par:

$$\widehat{\psi}(Y_{0:\tau}, x, z) = \mathbb{E}\Bigg(\exp\Bigg(h\int_0^\tau \left(x(1-\frac{s}{\tau}) + z\frac{s}{\tau} + B_s - \frac{s}{\tau}B_\tau\right)dY_s$$
$$-\frac{h^2}{2}\int_0^\tau \left(x(1-\frac{s}{\tau}) + z\frac{s}{\tau} + B_s - \frac{s}{\tau}B_\tau\right)^2 ds\Bigg)\Bigg),$$

Où : $(B_s, s \in [0, \tau])$ est un mouvement brownien sous la probabilité $\mathbb{P}$.
Par changement variable $s' = s/\tau$ et en utilisant la propriété d'invariance par changement d'échelle, nous obtenons :

$$\widehat{\psi}(Y_{0:\tau}, x, z) = \mathbb{E}\Bigg(\exp\Bigg(h\int_0^1 (x(1-s') + zs' + B_{\tau s'} - s'B_\tau)\,dY_{s'\tau}$$
$$-\frac{\tau h^2}{2}\int_0^1 (x(1-s') + zs' + B_{\tau s'} - s'B_\tau)^2 ds'\Bigg)\Bigg)$$
$$= \mathbb{E}\Bigg(\exp\Bigg(h\int_0^1 \left(x(1-s) + zs + \sqrt{\tau}(B_s - sB_1)\right)dY_{s\tau}$$
$$-\frac{\tau h^2}{2}\int_0^1 \left(x(1-s) + zs + \sqrt{\tau}(B_s - sB_1)\right)^2 ds\Bigg)\Bigg)$$

D'autre part :

$$h\int_0^1 \left(x(1-s) + zs + \sqrt{\tau}(B_s - sB_1)\right)dY_{s\tau} = h\int_0^1 (x(1-s) + zs)\,dY_{s\tau} + h\sqrt{\tau}\int_0^1 (B_s - sB_1)\,dY_{s\tau}$$

$$= hx\int_0^1 (1-s)\,dY_{s\tau} + hz\int_0^1 sdY_{s\tau} - h\sqrt{\tau}\int_0^1 \left(Y_{s\tau} - \int_0^1 Y_{s\tau}ds\right) dB_s$$

$$h^2\int_0^1 \left(x(1-s)+zs+\sqrt{\tau}(B_s - sB_1)\right)^2 ds = h^2\int_0^1 \left(x(1-s)+zs\right)^2 ds + h^2\tau\int_0^1 (B_s - sB_1)^2 ds$$
$$+ 2h^2\sqrt{\tau}\int_0^1 \left(x(1-s)+zs\right)(B_s - sB_1)\,ds$$
$$= \frac{h^2x^2}{3} + \frac{h^2z^2}{3} + \frac{h^2xz}{3} + h^2\tau\left(\int_0^1 B_s^2 ds + B_1\int_0^1 s^2 dB_s - \frac{2B_1^2}{3}\right)$$
$$+ 2h^2\sqrt{\tau}\left(\frac{(x-z)}{2}\int_0^1 s^2dB_s - x\int_0^1 sdB_s + \left(\frac{2x}{3}+\frac{z}{3}\right)\frac{B_1}{2}\right)$$

Donc,

$$\widehat{\psi}(Y_{0:\tau},x,z) = \exp\Bigg(-\frac{h^2\tau x^2}{6} + hx\int_0^1 (1-s)\,dY_{s\tau} - \frac{h^2\tau z^2}{6} + hz\int_0^1 sdY_{s\tau} - \frac{h^2\tau xz}{6}\Bigg)$$
$$\times\, \mathbb{E}\Bigg(\exp\Bigg(-h\sqrt{\tau}\int_0^1 \left(Y_{s\tau} - \int_0^1 Y_{s\tau}ds\right) dB_s + h^2\tau^{3/2}x\int_0^1 sdB_s +$$
$$+ \frac{h^2\tau^{3/2}}{2}(z-x)\int_0^1 s^2dB_s - h^2\tau^{3/2}\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{6}\right)B_1 - \frac{(h\tau)^2}{2}B_1\int_0^1 s^2dB_s$$
$$+ \frac{(h\tau)^2}{3}B_1^2 - \frac{(h\tau)^2}{2}\int_0^1 B_s^2ds\Bigg)\Bigg)$$

2.2.1.1. *Changement de mesure.* Pour tout $\tau > 0$, nous introduisons une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ telle que :

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_\tau} = \exp\left(-h\tau\int_0^1 B_s dB_s - \frac{(h\tau)^2}{2}\int_0^1 B_s^2 ds\right)$$

Par le théorème de Girsanov, sous la probabilité $\mathbb{Q}$, le processus suivant est un mouvement brownien :

$$\beta_t = B_t + h\tau\int_0^t B_s ds\,,\ \forall t \geq 0 \tag{2.2}$$

Nous obtenons :

$$\widehat{\psi}(Y_{0:\tau},x,z) = \exp\Bigg(-\frac{h^2\tau x^2}{6} + hx\int_0^1 (1-s)\,dY_{s\tau} - \frac{h^2\tau z^2}{6} + hz\int_0^1 sdY_{s\tau} - \frac{h_1^2\tau xz}{6}\Bigg) \tag{2.3}$$
$$\times\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Bigg(\exp\Bigg(-h\sqrt{\tau}\int_0^1 \left(Y_{s\tau} - \int_0^1 Y_{s\tau}ds\right) dB_s +$$
$$+ h^2\tau^{3/2}x\int_0^1 sdB_s + \frac{h^2\tau^{3/2}}{2}(z-x)\int_0^1 s^2dB_s - h^2\tau^{3/2}\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{6}\right)B_1$$
$$+ \left(\frac{(h\tau)^2}{3} + \frac{h\tau}{2}\right)B_1^2 - \frac{(h\tau)^2}{2}B_1\int_0^1 s^2dB_s - \frac{h\tau}{2}\Bigg)$$

2.2.1.2. *Calculs de Covariances.* Notons :

$$G_1 := B_1\,,\ G_2 := \int_0^1 sdB_s\,,\ G_3 := \int_0^1 s^2dB_s\,,\ G_4 := \int_0^1 \left(Y_{\tau s} - \int_0^1 Y_{\tau u}du\right) dB_s\,.$$

Il s'agit de cas gausien. Donc, l'espérance dans la formule (2.3) peut s'exprimer comme une fonction de matrice de covariance de ces gausiens. Nous allons calculer les covariances qui ne dépendent pas d'observation $Y_{0:\tau}$. Nous avons besoin des lemmes suivants.

LEMME 2.2. *Pour tout $t > 0$, pour toute fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable par rapport à la mesure de Lebesgue telle que $\int_0^t g(s)^2 ds < \infty$, nous avons :*

$$\int_0^t g(s) dB_s = \int_0^t \left(g(s) - \theta e^{\theta s} \int_s^t e^{-\theta u} g(u) du \right) d\beta_s \,,$$

Où :

$$\theta := h\tau \,. \tag{2.4}$$

DÉMONSTRATION. Sous $\mathbb{Q}$, B est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (voir équation (2.2)). Nous pouvons écrire B comme une solution forte de (2.2) :

$$B_t = e^{-\theta t} \int_0^t e^{\theta s} d\beta_s \,, \, \forall t \geq 0 \,. \tag{2.5}$$

Nous utilisons la formule d'Ito pour calculer :

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \left(g(s) - \theta e^{\theta s} \int_s^t e^{-\theta u} g(u) du \right) d\beta_s \\
&\quad = \int_0^t \left(g(s) - \theta e^{\theta s} \int_0^t e^{-\theta u} g(u) du \right) d\beta_s + \int_0^t \left(\theta e^{\theta s} \int_0^s e^{-\theta u} g(u) du \right) d\beta_s \\
&= \int_0^t g(s) d\beta_s - \left(\int_0^t e^{-\theta u} g(u) du \right) \left(\int_0^t \theta e^{\theta s} d\beta_s \right) + \int_0^t \left(\theta e^{\theta s} \int_0^s e^{-\theta u} g(u) du \right) d\beta_s \\
&= \int_0^t g(s) d\beta_s - \int_0^t e^{-\theta u} g(u) \left(\int_0^u \theta e^{\theta s} d\beta_s \right) du - \int_0^t \left(\int_0^s e^{-\theta u} g(u) du \right) \theta e^{\theta s} d\beta_s \\
&\qquad + \int_0^t \left(\theta e^{\theta s} \int_0^s e^{-\theta u} g(u) du \right) d\beta_s \\
&\qquad\qquad = \int_0^t g(s) d\beta_s - \int_0^t \theta g(u) B_u du = \int_0^t g(s) dB_s \,.
\end{aligned}$$

□

LEMME 2.3. *Nous avons, pour toutes $s, t \geq 0$,*

$$g(s) - \theta e^{\theta s} \int_s^t e^{-\theta u} g(u) du = \begin{cases} e^{\theta(s-t)} & \text{if } g(u) = 1, \, \forall u, \\ \left(t + \frac{1}{\theta}\right) e^{\theta(s-t)} - \frac{1}{\theta} & \text{if } g(u) = u, \, \forall u, \\ \left(t^2 + \frac{2t}{\theta} + \frac{2}{\theta^2}\right) e^{\theta(s-t)} - \left(\frac{2s}{\theta} + \frac{2}{\theta^2}\right) & \text{if } g(u) = u^2, \, \forall u \,. \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Pour toutes $s, t \geq 0$:

$$\begin{aligned}
1 - \theta e^{\theta s} \int_s^t e^{-\theta u} du &= 1 - \theta e^{\theta s} \left[-\frac{1}{\theta} e^{-\theta u} \right]_s^t \\
&= e^{\theta(s-t)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s - \theta e^{\theta s} \int_s^t u e^{-\theta u} du &= s - \theta e^{\theta s} \left[\left(-\frac{u}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \right) e^{-\theta u} \right]_s^t \\
&= s - \theta \left(-\frac{t}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \right) e^{\theta(s-t)} + \theta \left(-\frac{s}{\theta} - \frac{1}{\theta^2} \right) \\
&= \left(t + \frac{1}{\theta} \right) e^{\theta(s-t)} - \frac{1}{\theta} \,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s^2 - \theta e^{\theta s} \int_s^t u^2 e^{-\theta u} du &= s^2 - \theta e^{\theta s} \left[\left(-\frac{u^2}{\theta} - \frac{2u}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \right) e^{-\theta u} \right]_s^t \\
&= s^2 - \theta e^{\theta s} \left(-\frac{t^2}{\theta^2} - \frac{2t}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \right) e^{-\theta t} + \theta e^{\theta s} \left(-\frac{s^2}{\theta} - \frac{2s}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3} \right) e^{-\theta s}
\end{aligned}$$

$$= \left(t^2 + \frac{2t}{\theta} + \frac{2}{\theta^2}\right) e^{\theta(s-t)} - \left(\frac{2s}{\theta} + \frac{2}{\theta^2}\right).$$

□

LEMME 2.4. *Nous avons :*

$$\mathbb{V}^{\mathbb{Q}}(G_1) = \frac{1-e^{-2\theta}}{2\theta},$$

$$\mathbb{V}^{\mathbb{Q}}(G_2) = \left(1+\frac{1}{\theta}\right)^2 \frac{(1-e^{-2\theta})}{2\theta} + \frac{1}{\theta^2} - \left(\frac{2}{\theta^2}+\frac{2}{\theta^3}\right)(1-e^{-\theta}),$$

$$\mathbb{V}^{\mathbb{Q}}(G_3) = \left(1+\frac{2}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)^2 \frac{(1-e^{-2\theta})}{2\theta} + \left(\frac{2}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)^3 \frac{\theta}{6} - \frac{4}{3\theta^5} - \frac{4}{\theta^2}\left(1+\frac{2}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)$$

$$Cov^{\mathbb{Q}}(G_1, G_2) = \left(\frac{1}{2\theta}+\frac{1}{2\theta^2}\right)(1-e^{-2\theta}) + \frac{e^{-\theta}-1}{\theta^2},$$

$$Cov^{\mathbb{Q}}(G_1, G_3) = \left(\frac{1}{2\theta}+\frac{1}{\theta^2}+\frac{1}{\theta^3}\right)(1-e^{-2\theta}) - \frac{2}{\theta^2},$$

$$Cov^{\mathbb{Q}}(G_2, G_3) = \left(1+\frac{1}{\theta}\right)\left(\frac{1}{2\theta}+\frac{1}{\theta^2}+\frac{1}{\theta^3}\right)(1-e^{-2\theta}) - \left(\frac{1}{\theta^2}+\frac{2}{\theta^3}+\frac{2}{\theta^4}\right)(1-e^{-\theta}) - \frac{1}{\theta^2}.$$

DÉMONSTRATION. En utilisant Lemme 2.2, sous la probabilité $\mathbb{Q}$, les variables G_1, G_2, G_3, G_4 sont Gaussiens centrés. En utilisant Lemma 2.3, nous pouvons calculer les espérances suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(G_1^2) &= \int_0^1 e^{2\theta(s-1)} ds \\
&= \frac{1-e^{-2\theta}}{2\theta},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(G_2^2) &= \int_0^1 \left(\left(1+\frac{1}{\theta}\right)e^{\theta(s-1)} - \frac{1}{\theta}\right)^2 ds \\
&= \int_0^1 \left(1+\frac{1}{\theta}\right)^2 e^{2\theta(s-1)} + \frac{1}{\theta^2} - \frac{2}{\theta}\left(1+\frac{1}{\theta}\right)e^{\theta(s-1)} ds \\
&= \left[\left(1+\frac{1}{\theta}\right)^2 \frac{e^{2\theta(s-1)}}{2\theta} + \frac{s}{\theta^2} - \left(1+\frac{1}{\theta}\right)\frac{2e^{\theta(s-1)}}{\theta^2}\right]_0^1 \\
&= \left(1+\frac{1}{\theta}\right)^2 \frac{(1-e^{-2\theta})}{2\theta} + \frac{1}{\theta^2} - \left(\frac{2}{\theta^2}+\frac{2}{\theta^3}\right)(1-e^{-\theta}),
\end{aligned}$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(G_3^2) = \int_0^1 \left(\left(1+\frac{2}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)e^{\theta(s-1)} - \left(\frac{2s}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)\right)^2 ds =$$

$$\int_0^1 \left(1+\frac{2}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)^2 e^{2\theta(s-1)} + \left(\frac{2s}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)^2 - 2\left(1+\frac{2}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)e^{\theta(s-1)}\left(\frac{2s}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right) =$$

$$\left[\left(1+\frac{2}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)^2 \frac{e^{2\theta(s-1)}}{2\theta} + \left(\frac{2s}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)^3 \frac{\theta}{6} - 2\left(1+\frac{2}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)\left(\frac{2s}{\theta^2}\right)e^{\theta(s-1)}\right]_0^1 =$$

$$\left(1+\frac{2}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)^2 \frac{(1-e^{-2\theta})}{2\theta} + \left(\frac{2}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)^3 \frac{\theta}{6} - \frac{4}{3\theta^5} - \frac{4}{\theta^2}\left(1+\frac{2}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right),$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(G_1G_2) &= \int_0^1 e^{\theta(s-1)} \times \left(\left(1+\frac{1}{\theta}\right)e^{\theta(s-1)} - \frac{1}{\theta}\right) ds \\
&= \left[\left(1+\frac{1}{\theta}\right)\frac{e^{2\theta(s-1)}}{2\theta} - \frac{e^{\theta(s-1)}}{\theta^2}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2\theta}+\frac{1}{2\theta^2}\right)(1-e^{-2\theta}) + \frac{e^{-\theta}-1}{\theta^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(G_1G_3) &= \int_0^1 e^{\theta(s-1)}\left(\left(1+\frac{2}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)e^{\theta(s-1)}-\left(\frac{2s}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)\right)ds\\ &= \left[\left(1+\frac{2}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)\frac{e^{2\theta(s-1)}}{2\theta}-\frac{2s}{\theta^2}e^{\theta(s-1)}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2\theta}+\frac{1}{\theta^2}+\frac{1}{\theta^3}\right)(1-e^{-2\theta})-\frac{2}{\theta^2}\,,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(G_2G_3) &= \int_0^1 \left(\left(1+\frac{1}{\theta}\right)e^{\theta(s-1)}-\frac{1}{\theta}\right)\times\left(\left(1+\frac{2}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)e^{\theta(s-1)}-\left(\frac{2s}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)\right)ds\\ &= \int_0^1 \left(1+\frac{1}{\theta}\right)\left(1+\frac{2}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)e^{2\theta(s-1)}-\frac{1}{\theta}\left(1+\frac{2}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)e^{\theta(s-1)}\\ &\qquad -\left(1+\frac{1}{\theta}\right)e^{\theta(s-1)}\left(\frac{2s}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)+\frac{1}{\theta}\left(\frac{2s}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)ds\\ &= \left[\left(1+\frac{1}{\theta}\right)\left(1+\frac{2}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}\right)\frac{e^{2\theta(s-1)}}{2\theta}-\left(\frac{1}{\theta}+\frac{2}{\theta^2}+\frac{2}{\theta^3}\right)\frac{e^{\theta(s-1)}}{\theta}\right.\\ &\qquad \left.-\left(1+\frac{1}{\theta}\right)\frac{2s}{\theta^2}e^{\theta(s-1)}+\left(\frac{s^2}{\theta^2}+\frac{2s}{\theta^3}\right)\right]_0^1\\ &= \left(1+\frac{1}{\theta}\right)\left(\frac{1}{2\theta}+\frac{1}{\theta^2}+\frac{1}{\theta^3}\right)(1-e^{-2\theta})-\left(\frac{1}{\theta^2}+\frac{2}{\theta^3}+\frac{2}{\theta^4}\right)(1-e^{-\theta})-\frac{1}{\theta^2}\end{aligned}$$

□

Soient U_1, U_2, U_3, U_4 *i.i.d.* de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Nous pouvons trouver $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{pmatrix} G_1 \\ G_3 \\ G_2 \\ G_4 \end{pmatrix} \overset{\text{law}}{=} \begin{pmatrix} \alpha U_1 & & & \\ \beta U_1 & +\gamma U_2 & & \\ a U_1 & +b U_2 & +c U_3 & \\ \lambda_1 U_1 & +\lambda_2 U_2 & +\lambda_3 U_3 & +\lambda_4 U_4 \end{pmatrix}.$$

En effet, nous prenons :

$$\alpha = \sqrt{\mathbb{V}^{\mathbb{Q}}(G_1)}\,,\ \beta = \frac{\mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_1,G_3)}{\alpha}\,,\ \gamma = \sqrt{\mathbb{V}^{\mathbb{Q}}(G_3)-\beta^2}\,, \tag{2.6}$$

$$a = \frac{\mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_1,G_2)}{\alpha}\,,\ b = \frac{\mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_2,G_3)-a\beta}{\gamma}\,,\ c = \sqrt{\mathbb{V}^{\mathbb{Q}}(G_2)-a^2-b^2}\,. \tag{2.7}$$

Et nous cherchons $\lambda_1(Y_{0:\tau}), \ldots, \lambda_4(Y_{0:\tau})$ en résolvant :

$$\begin{cases} \alpha\lambda_1(Y_{0:\tau}) & & & & = \mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_1,G_4) \\ \beta\lambda_1(Y_{0:\tau}) & +\gamma\lambda_2(Y_{0:\tau}) & & & = \mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_3,G_4) \\ a\lambda_1(Y_{0:\tau}) & +b\lambda_2(Y_{0:\tau}) & +c\lambda_3(Y_{0:\tau}) & & = \mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_2,G_4) \\ \lambda_1^2(Y_{0:\tau}) & +\lambda_2^2(Y_{0:\tau}) & +\lambda_3^2(Y_{0:\tau}) & +\lambda_4^2(Y_{0:\tau}) & = \mathbb{V}^{\mathbb{Q}}(G_4)\,. \end{cases} \tag{2.8}$$

Nous observons que $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ peuvent s'exprimer explicitement en terme de paramètres de problème.

2.2.1.3. *Calculs d'intégrale.* L'espérance dans la formule (2.3) devient :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Bigg(\exp\Bigg(\left(\frac{\theta^2}{3}+\frac{\theta}{2}\right)G_1^2-\frac{\theta^2}{2}G_1G_3-h^2\tau^{3/2}\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{6}\right)G_1\\ &\qquad\qquad +h^2\tau^{3/2}xG_2+\frac{h^2\tau^{3/2}}{2}(z-x)\,G_3-h\sqrt{\tau}G_4\Bigg)\Bigg) = \end{aligned} \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{u_1,\ldots,u_4\in\mathbb{R}}\exp\Bigg(\left(\frac{\theta^2}{3}+\frac{\theta}{2}\right)\alpha^2u_1^2-\frac{\theta^2}{2}\alpha u_1(\beta u_1+\gamma u_2)-h^2\tau^{3/2}\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{6}\right)\alpha u_1\\ &+h^2\tau^{3/2}x(au_1+bu_2+cu_3)+\frac{h^2\tau^{3/2}}{2}(z-x)(\beta u_1+\gamma u_2)-h\sqrt{\tau}(\lambda_1u_1+\cdots+\lambda_4u_4)\Bigg)\end{aligned}$$

$$\exp\left(-\frac{(u_1^2+\cdots+u_4^2)}{2}\right) du_1\dots du_4 =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{u_1,\dots,u_4\in\mathbb{R}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2}\left[u_1-\sigma_1^2\left(-\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}u_2-h^2\tau^{3/2}\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{6}\right)\alpha+h^2\tau^{3/2}xa\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{h^2\tau^{3/2}}{2}(z-x)\beta-h\sqrt{\tau}\lambda_1\right)\right]^2$$
$$+\frac{\sigma_1^2}{2}\left[-\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}u_2-h^2\tau^{3/2}\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{6}\right)\alpha+h^2\tau^{3/2}xa+\frac{h^2\tau^{3/2}}{2}(z-x)\beta-h\sqrt{\tau}\lambda_1\right]^2$$
$$+h^2\tau^{3/2}x(bu_2+cu_3)+\frac{h^2\tau^{3/2}}{2}(z-x)\gamma u_2-h\sqrt{\tau}(\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_4u_4)$$
$$\left.-\frac{(u_2^2+\cdots+u_4^2)}{2}\right\} du_1\dots du_4\,,$$

Où :

$$\sigma_1^2 := \left(2\left(-\left(\frac{\theta^2}{3}+\frac{\theta}{2}\right)\alpha^2+\frac{\theta^2\alpha\beta}{2}+\frac{1}{2}\right)\right)^{-1}. \tag{2.10}$$

Parce que l'espérance au-dessus est finie, donc σ_1^2 est bien définie. Nous posons :

$$m_1=\sigma_1^2\left(-h^2\tau^{3/2}\left(\frac{x}{3}+\frac{z}{6}\right)\alpha+h^2\tau^{3/2}xa+\frac{h^2\tau^{3/2}}{2}(z-x)\beta-h\sqrt{\tau}\lambda_1\right). \tag{2.11}$$

L'espérance dans (2.9) devient :

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{u_1,\dots,u_4\in\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}\left[u_1+\sigma_1^2\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}u_2-m_1\right]^2\right. \tag{2.12}$$
$$+\left(\frac{\sigma_1^2\theta^2\alpha\gamma}{2}\right)^2u_2^2\frac{1}{2\sigma_1^2}+\frac{m_1^2}{2\sigma_1^2}-\left(\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\right)m_1u_2$$
$$+h^2\tau^{3/2}x(bu_2+cu_3)+\frac{h^2\tau^{3/2}}{2}(z-x)\gamma u_2$$
$$\left.-h\sqrt{\tau}(\lambda_2u_2+\lambda_3u_3+\lambda_4u_4)-\frac{(u_2^2+u_3^2+u_4^2)}{2}\right)du_1\dots du_4=$$
$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{u_1,\dots,u_4\in\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}\left[u_1+\sigma_1^2\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}u_2-m_1\right]^2\right.$$
$$-\frac{1}{2\sigma_2^2}\left[u_2-\sigma_2^2\left(h^2\tau^{3/2}xb+\frac{h^2\tau^{3/2}}{2}(z-x)\gamma-h\sqrt{\tau}\lambda_2-\frac{\theta^2\alpha\gamma m_1}{2}\right)\right]^2$$
$$\left.+\frac{m_2^2}{2\sigma_2^2}+\frac{m_1^2}{2\sigma_1^2}+h^2\tau^{3/2}xcu_3-h\sqrt{\tau}(\lambda_3u_3+\lambda_4u_4)-\frac{(u_3^2+u_4^2)}{2}\right)du_1\dots du_4$$

Où :

$$\sigma_2^2=\left(2\left(-\frac{\sigma_1^2\theta^4\alpha^2\gamma^2}{8}+\frac{1}{2}\right)\right)^{-1}, \tag{2.13}$$

Et,

$$m_2=\sigma_2^2\left(h^2\tau^{3/2}xb+\frac{h^2\tau^{3/2}}{2}(z-x)\gamma-h\sqrt{\tau}\lambda_2-\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}m_1\right). \tag{2.14}$$

Donc (2.12) est égal à :

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{u_1,\dots,u_4\in\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma_1^2}\left[u_1+\sigma_1^2\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}u_2-m_1\right]^2-\frac{1}{2\sigma_2^2}[u_2-m_2]^2+\frac{m_2^2}{2\sigma_2^2}+\frac{m_1^2}{2\sigma_1^2}\right. \tag{2.15}$$

$$-\frac{1}{2}\left[u_3-h^2\tau^{3/2}cx+h\sqrt{\tau}\lambda_3\right]^2-\frac{1}{2}\left[u_4+h\sqrt{\tau}\lambda_4\right]^2$$
$$+\frac{1}{2}(-h^2\tau^{3/2}xc+h\sqrt{\tau}\lambda_3)^2+\frac{1}{2}(-h\sqrt{\tau}\lambda_4)^2\Big)\,du_1\dots du_4=$$
$$\sigma_1\sigma_2\exp\left(\frac{m_2^2}{2\sigma_2^2}+\frac{m_1^2}{2\sigma_1^2}+\frac{1}{2}(-h^2\tau^{3/2}xc+h\sqrt{\tau}\lambda_3)^2+\frac{1}{2}(h\sqrt{\tau}\lambda_4)^2\right)$$

2.2.1.4. *Asymptotiquement.* A partir de (2.3) et (2.15), nous pouvons écrire : $\widehat{\psi}(x,z,Y_{0:\tau})=\sigma_1\sigma_2\exp(P(x,z))$, où P est un polynôme de 2 degrés. Notons $-A_2(\theta)$ pour le coefficient de x^2 dans P, $-B_2(\theta)$ pour le coefficient de z^2 dans P, $C_1(\theta)$ pour le coefficient de xz dans P, $A_1^{Y_{0:\tau}}(\theta)$ pour le coefficient de x dans P, $B_1^{Y_{0:\tau}}(\theta)$ pour le coefficient de z dans P, $C_0^{Y_{0:\tau}}(\theta)$ pour la constante dans P. Nous avons :

(2.16)

$$\widehat{\psi}(x,z,Y_{0:\tau})=\sigma_1\sigma_2\exp\left(-A_2(\theta)\,x^2-B_2(\theta)\,z^2+A_1^{Y_{0:\tau}}(\theta)\,x+B_1^{Y_{0:\tau}}(\theta)\,z+C_1(\theta)\,xz+C_0^{Y_{0:\tau}}(\theta)\right)$$

Où ses coefficients sont définis ci-dessous :

$$A_2(\theta)=h\frac{\theta}{6}-\frac{\sigma_1^2}{2}h\theta^3\left(-\frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{2}+a\right)^2-\frac{1}{2}h\theta^3c^2-$$
$$-\frac{\sigma_2^2}{2}h\theta^3\left(b-\frac{\gamma}{2}-\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\left(-\frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{2}+a\right)\right)^2 \tag{2.17}$$

$$B_2(\theta)=h\frac{\theta}{6}-\frac{\sigma_1^2}{2}h\theta^3\left(-\frac{\alpha}{6}+\frac{\beta}{2}\right)^2-\frac{\sigma_2^2}{2}h\theta^3\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\left(-\frac{\alpha}{6}+\frac{\beta}{2}\right)\right)^2 \tag{2.18}$$

$$C_1(\theta)=-h\frac{\theta}{6}+\sigma_1^2h\theta^3\left(-\frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{2}+a\right)\left(-\frac{\alpha}{6}+\frac{\beta}{2}\right)$$
$$+\sigma_2^2h\theta^3\left(b-\frac{\gamma}{2}-\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\left(-\frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{2}+a\right)\right)\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\left(-\frac{\alpha}{6}+\frac{\beta}{2}\right)\right) \tag{2.19}$$

$$C_0^{Y_{0:\tau}}(\theta)\triangleq\frac{h\theta}{2}\lambda_4^2+\frac{h\theta}{2}\lambda_3^2+\frac{\sigma_2^2h\theta}{2}(\lambda_2-\frac{\sigma_1^2\theta^2\alpha\gamma}{2}\lambda_1)^2+\frac{\sigma_1^2h\theta}{2}\lambda_1^2-\frac{\theta}{2} \tag{2.20}$$

$$A_1^{Y_{0:\tau}}(\theta)\triangleq h\int_0^1(1-s)\,dY_{s\tau}-h\theta^2\lambda_3c+\sigma_1^2h\theta^2\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}-a\right)\lambda_1$$
$$+\sigma_2^2h\theta^2\left(b-\frac{\gamma}{2}+\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}-a\right)\right)\left(-\lambda_2+\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\lambda_1\right), \tag{2.21}$$

$$B_1^{Y_{0:\tau}}(\theta)\triangleq h\int_0^1 s dY_{s\tau}+\sigma_1^2h\theta^2\left(\frac{\alpha}{6}-\frac{\beta}{2}\right)\lambda_1+$$
$$+\sigma_2^2h\theta^2\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\left(-\frac{\alpha}{6}+\frac{\beta}{2}\right)\right)\left(-\lambda_2+\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\lambda_1\right) \tag{2.22}$$

Supposons que h fixée. Nous aimerions étudier $A_2(\theta)$, $B_2(\theta)$, $C_1(\theta)$ quand $\theta\to+\infty$.

LEMME 2.5. *Nous avons :*

$$A_2(\theta)\xrightarrow[\theta\to+\infty]{}\frac{h}{2},$$
$$B_2(\theta)\xrightarrow[\theta\to+\infty]{}\frac{h}{2},$$
$$C_1(\theta)=-\frac{3h}{2\theta}+o\left(\frac{1}{\theta}\right)$$

DÉMONSTRATION. A partir du lemma 2.4 et des formules (2.6), (2.7), nous obtenons :

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} + o\left(\frac{1}{\theta^n}\right) \text{ , } \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ ,} \tag{2.23}$$

$$\mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_1, G_3) = \frac{1}{2\theta} - \frac{1}{\theta^2} + \frac{1}{\theta^3} + o\left(\frac{1}{\theta^3}\right) \text{ ,} \tag{2.24}$$

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} - \frac{\sqrt{2}}{\theta^{3/2}} + \frac{\sqrt{2}}{\theta^{5/2}} + o\left(\frac{1}{\theta^{5/2}}\right) \text{ ,} \tag{2.25}$$

$$\beta^2 = \frac{1}{2\theta} - \frac{2}{\theta^2} + \frac{4}{\theta^3} - \frac{4}{\theta^4} + o\left(\frac{1}{\theta^4}\right) \text{ ,} \tag{2.26}$$

$$\mathbb{V}^{\mathbb{Q}}(G_3) = \frac{1}{2\theta} - \frac{2}{3\theta^2} + o\left(\frac{1}{\theta^4}\right) \text{ ,} \tag{2.27}$$

$$\gamma = \frac{2}{\theta\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\theta^2} + \frac{\sqrt{3}}{4\theta^3} + \frac{3\sqrt{3}}{8\theta^4} + o\left(\frac{1}{\theta^4}\right), \tag{2.28}$$

$$\sigma_1^2 = \frac{6}{\theta} + \frac{18}{\theta^2} + \frac{18}{\theta^3} - \frac{54}{\theta^4} + o\left(\frac{1}{\theta^4}\right) \text{ ,} \tag{2.29}$$

$$\mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_1, G_2) = \frac{1}{2\theta} - \frac{1}{2\theta^2} + o\left(\frac{1}{\theta^3}\right) \text{ ,} \tag{2.30}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\theta}} - \frac{1}{\sqrt{2}\theta^{3/2}} + o\left(\frac{1}{\theta^{5/2}}\right) \text{ ,} \tag{2.31}$$

$$\mathbb{V}^{\mathbb{Q}}(G_2) = \frac{1}{2\theta} - \frac{3}{2\theta^3} + o\left(\frac{1}{\theta^3}\right) \text{ ,} \tag{2.32}$$

$$c^2 = \frac{1}{4\theta^2} - \frac{5}{4\theta^3} + o\left(\frac{1}{\theta^3}\right) \text{ ,} \tag{2.33}$$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{3\theta^2} - \frac{1}{\theta} + 2 + o\left(\frac{1}{\theta^3}\right) \tag{2.34}$$

A partir de ces limites, nous obtenons :

$$b - \frac{\gamma}{2} - \frac{\theta^2\alpha\gamma}{4}\sigma_1^2\left(-\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} + a\right) = \frac{\sqrt{3}}{2\theta^3} + o\left(\frac{1}{\theta^3}\right),$$

$$\frac{\sigma_2^2}{2}h\theta^3\left(b - \frac{\gamma}{2} - \frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\left(-\frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{2} + a\right)\right)^2 \xrightarrow[\theta\to+\infty]{} 0,$$

$$\frac{1}{2}h\theta^3c^2 = h\left(\frac{\theta}{8} - \frac{5}{8} + o\left(1\right)\right),$$

$$\frac{\sigma_1^2}{2}h\theta^3\left(-\frac{\alpha}{3} - \frac{\beta}{2} + a\right)^2 = h\left(\frac{\theta}{24} + \frac{1}{8} + o\left(1\right)\right),$$

$$A_2\left(\theta\right) \xrightarrow[\theta\to+\infty]{} \frac{h}{2} \tag{2.35}$$

$$\frac{\sigma_2^2}{2}h\theta^3\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\left(-\frac{\alpha}{6} + \frac{\beta}{2}\right)\right)^2 \xrightarrow[\theta\to+\infty]{} 0,$$

$$\frac{\sigma_1^2}{2}h\theta^3\left(-\frac{\alpha}{6}+\frac{\beta}{2}\right)^2 = h\left(\frac{\theta}{6}-\frac{1}{2}+o\left(1\right)\right),$$

$$B_2\left(\theta\right) \xrightarrow[\theta\to+\infty]{} \frac{h}{2} \tag{2.36}$$

Et,

$$\frac{\sigma_2^2}{2}h\theta^3\left(b-\frac{\gamma}{2}-\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\left(-\frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{2}+a\right)\right)\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\left(-\frac{\alpha}{6}+\frac{\beta}{2}\right)\right) \xrightarrow[\theta\to+\infty]{} 0,$$

$$\frac{\sigma_1^2}{2}h\theta^3\left(-\frac{\alpha}{3}-\frac{\beta}{2}+a\right)\left(-\frac{\alpha}{6}+\frac{\beta}{2}\right) = h\left(\frac{\theta}{6}-\frac{3}{2\theta}+o\left(\frac{1}{\theta}\right)\right),$$

Donc,

$$C_1\left(\theta\right) = -\frac{3h}{2\theta}+o\left(\frac{1}{\theta}\right) \tag{2.37}$$

□

REMARQUE. Les calculs asymptotiques au-dessus sont faites en utilisant Mathematica.

2.2.1.5. *La formule de $\widehat{\psi}$ en général.* Dans le cas général, par changement variable :

$$\begin{cases} \hat{X}_s &= X_{s+(n-1)\tau} \\ \hat{Y}_s &= Y_{s+(n-1)\tau} \end{cases}$$

Nous obtenons :

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(Y_{(n-1)\tau:n\tau},x,z) = \sigma_1\sigma_2\exp\Big(&-A_2\left(\theta\right)x^2+A_1^{Y_{(n-1)\tau:n\tau}}\left(\theta\right)x+C_1\left(\theta\right)xz \\ &+B_1^{Y_{(n-1)\tau:n\tau}}\left(\theta\right)z-B_2\left(\theta\right)z^2+C_0^{Y_{(n-1)\tau:n\tau}}\left(\theta\right)\Big) \end{aligned} \tag{2.38}$$

Où :

$$\begin{aligned} C_0^{Y_{(n-1)\tau:n\tau}}\left(\theta\right) = &-\frac{\theta}{2}+\frac{h\theta}{2}\left(\lambda_4\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right)\right)^2+\frac{h\theta}{2}(\lambda_3\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right))^2 \\ &+\frac{\sigma_2^2h\theta}{2}\left(\lambda_2\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right)-\frac{\sigma_1^2\theta^2\alpha\gamma}{2}\lambda_1\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right)\right)^2+\frac{\sigma_1^2h\theta}{2}\left(\lambda_1\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right)\right)^2, \end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned} A_1^{Y_{(n-1)\tau:n\tau}}\left(\theta\right) = h\int_{n-1}^{n}\left(n-s\right)dY_{s\tau}-h\theta^2\lambda_3\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right)c+\sigma_1^2h\theta^2\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}-a\right)\lambda_1\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right) \\ +\sigma_2^2h\theta^2\left(b-\frac{\gamma}{2}+\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\left(\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{2}-a\right)\right)\left(-\lambda_2\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right)+\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\lambda_1\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right)\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1^{Y_{(n-1)\tau:n\tau}}\left(\theta\right) = h\int_{n-1}^{n}\left(s+1-n\right)dY_{s\tau}+\sigma_1^2h\theta^2\left(\frac{\alpha}{6}-\frac{\beta}{2}\right)\lambda_1\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right) \\ +\sigma_2^2h\theta^2\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\left(-\frac{\alpha}{6}+\frac{\beta}{2}\right)\right)\left(-\lambda_2\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right)+\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\lambda_1\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right)\right) \end{aligned}$$

Et, les paramètres $\lambda_1\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right), \lambda_2\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right), \lambda_3\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right), \lambda_4\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right)$ sont définis par :

$$\begin{cases} \alpha\lambda_1\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right) & & & = \mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_1,G_4^{(n)}) \\ \beta\lambda_1\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right) & +\gamma\lambda_2\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right) & & = \mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_3,G_4^{(n)}) \\ a\lambda_1\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right) & +b\lambda_2\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right) & +c\lambda_3\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right) & = \mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_2,G_4^{(n)}) \\ \sum_{i=1}^4\left(\lambda_i\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right)\right)^2 & & & = \mathbb{V}^{\mathbb{Q}}(G_4^{(n)}). \end{cases} \tag{2.40}$$

Où :

$$G_4^{(n)} := \int_{n-1}^{n} \left(Y_{\tau s} - \int_{n-1}^{n} Y_{\tau u} du \right) dB_s$$

Pour tout $n \geq 1$, on s'intéresse maintenant aux termes qui dépendent de l'observation dans la formule de $\widehat{\psi}$. Nous allons établir quelques propriétés sur $A_1^{Y_{(n-1)\tau:n\tau}}(\theta)$ et $B_1^{Y_{(n-1)\tau:n\tau}}(\theta)$. Donc, nous introduisons la nouvelle définition suivante.

DÉFINITION 2.6. Soient f_1, f_2 deux fonctions de E dans $\mathbb{R}$. Nous écrivons $f_1 \preceq f_2$ s'il existe une constante C qui ne dépend pas de paramètre du problème tel que $f_1(z) \leq C f_2(z)$ avec pour tout $z \in E$. En particulier, quand on traîte avec une fonction de paremètre $\triangle$, nous écrivons $f_1 \underset{\triangle}{\preceq} f_2$ ou bien $f_1(\triangle) \underset{\triangle}{\preceq} f_2(\triangle)$ s'il existe une constante C_1 qui ne dépend pas de paramètre du problème et une autre constante C_2 qui peut dépendre du paremètre de notre problème telles que $f_1(\triangle) \leq C_1 f_2(\triangle) + C_2$.

Nous donnons une propriété pratique (sans démonstration) pour la définition au-dessus dans le lemme suivant.

LEMME 2.7. *Supposons que nous avons des fonctions f, f_1, f_2, h_1, h_2 de E dans $\mathbb{R}$, où les fonctions f, f_1, f_2 sont positives et E est un ensemble quelconque. Si $f \leq f_1 + f_2$ et $f_1 \preceq f_2$, alors $f \preceq f_2$. Si $f \leq f_1 + f_2$ et $\log(f_1) \underset{\triangle}{\preceq} h_1$ et $\log(f_2) \underset{\triangle}{\preceq} h_2$, alors $\log(f) \underset{\triangle}{\preceq} \sup(h_1, h_2)$.*

Pour tout $s \leq t$, notons :

$$\mathcal{W}_{s,t} = \sup_{(s_1,s_2)\in[s,t]} |W_{s_1} - W_{s_2}|, \mathcal{V}_{s,t} = \sup_{(s_1,s_2)\in[s,t]} |V_{s_1} - V_{s_2}|.$$

En utilisant la définition, nous avons le résultat suivant pour le terme $B_1^{Y_{(n-1)\tau:n\tau}}(\theta)$.

LEMME 2.8. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$,*

$$\left|B_1(Y_{k\tau:(k+1)\tau}, \theta) - B_1(Y_{(k+1)\tau:(k+2)\tau}, \theta)\right| \preceq Mh\tau + h\mathcal{V}_{k\tau,(k+2)\tau} + h\mathcal{W}_{k\tau,(k+2)\tau},$$

et

$$|B_1(Y_{0:\tau}, \theta)| \preceq Mh\tau + h\mathcal{V}_{0,2\tau} + h\mathcal{W}_{0,2\tau}.$$

Avant de montrer ce résultat, nous allons d'abord montrer le lemme suivant.

LEMME 2.9. *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $s \in [k, k+1]$,*

$$\left| Y_{\tau s} - \int_k^{k+1} Y_{\tau u} du - Y_{\tau(s+1)} + \int_k^{k+1} Y_{\tau(u+1)} du \right| \preceq h\tau^2 M + h\tau\mathcal{V}_{k\tau,(k+1)\tau} + \mathcal{W}_{k\tau,(k+1)\tau}$$

$$\left| \int_0^1 \frac{e^{-\theta}\sinh(\theta s)}{\theta} dY_{\tau k+\tau s} - \int_0^1 \frac{e^{-\theta}\sinh(\theta s)}{\theta} dY_{\tau(k+1)+\tau s} \right| \preceq \frac{M\tau + \mathcal{V}_{k\tau,(k+1)\tau} + \mathcal{W}_{k\tau,(k+1)\tau}}{\theta}$$

DÉMONSTRATION. Nous avons :

$$\begin{aligned}
&\left| Y_{\tau s} - \int_k^{k+1} Y_{\tau u} du - Y_{\tau(s+1)} + \int_k^{k+1} Y_{\tau(u+1)} du \right| \\
&= \left| \int_{\tau s}^{\tau(s+1)} hX_u du + W_{\tau(s+1)} - W_{\tau s} - \int_k^{k+1} \left(h\int_{\tau u}^{\tau(u+1)} X_v dv + W_{\tau(u+1)} - W_{\tau u} \right) du \right| \\
&\preceq \left| \int_k^{k+1} h \left(\int_{\tau s}^{\tau(s+1)} X_v dv - \int_{\tau u}^{\tau(u+1)} X_v dv \right) du \right| + \mathcal{W}_{k\tau,(k+2)\tau} \\
&= \left| h \int_k^{k+1} \left(\int_{\tau s}^{\tau(s+1)} X_v - X_{v+\tau(u-s)} dv \right) du \right| + \mathcal{W}_{k\tau,(k+2)\tau} \\
&= \left| h \int_k^{k+1} \left(\int_{\tau s}^{\tau(s+1)} \int_{v+\tau(u-s)}^{v} f(X_t)dt + V_v - V_{v+\tau(u-s)} dv \right) du \right| + \mathcal{W}_{k\tau,(k+2)\tau}
\end{aligned}$$

$$\leq h\tau^2 M + h\tau \mathcal{V}_{k\tau,(k+2)\tau} + \mathcal{W}_{k\tau,(k+2)\tau} \ ,$$

et

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^1 \frac{e^{-\theta}\sinh(\theta s)}{\theta} dY_{\tau k+\tau s} - \int_0^1 \frac{e^{-\theta}\sinh(\theta s)}{\theta} dY_{\tau(k+1)+\tau s} \right| \\
&\qquad = \left| \int_0^\tau \frac{e^{-\theta}\sinh(hs)}{\theta} (h(X_{\tau k+s} - X_{\tau(k+1)+s}) ds + dW_{\tau k+s} - dW_{\tau(k+1)+s}) \right| \\
&\quad \leq \left| \int_0^\tau \frac{e^{-\theta}\sinh(hs)}{\theta} h(X_{\tau k+s} - X_{\tau(k+1)+s}) ds \right| + \left| \frac{e^{-\theta}\sinh(\theta)}{\theta} (W_{\tau(k+1)} - W_{\tau(k+2)}) \right| \\
&\qquad\quad + \left| \int_0^\tau (W_{\tau k+s} - W_{\tau(k+1)+s}) \frac{e^{-\theta}\cosh(hs)}{\tau} ds \right| \preceq \frac{M\tau + \mathcal{V}_{k\tau,(k+2)\tau}}{\theta} + \frac{\mathcal{W}_{k\tau,(k+2)\tau}}{\theta}
\end{aligned}$$

□

Démonstration du lemma 2.8. On prouve ce lemme dans le cas où $k = 0$ et on fait de la même manière dans le cas général. A partir du lemme 2.2 et du lemme 2.3, nous avons :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_1, G_4^{(1)}) &= \int_0^1 e^{\theta(s-1)} \left(g_1(s) - \theta e^{\theta s} \int_s^1 e^{-\theta u} g_1(u)\, du \right) ds \\
&= \int_0^1 e^{\theta(s-1)} g_1(s)\, ds - \theta \int_0^1 e^{\theta(2s-1)} \left(\int_s^1 e^{-\theta u} g_1(u)\, du \right) ds \\
&= \int_0^1 e^{\theta(s-1)} g_1(s)\, ds - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_s^1 e^{-\theta u} g_1(u)\, du \right) de^{\theta(2s-1)} \\
&= \int_0^1 e^{\theta(s-1)} g_1(s)\, ds - e^{-\theta} \int_0^1 \frac{(-e^{-\theta s} + e^{\theta s})}{2} g_1(s)\, ds \\
&= e^{-\theta} \int_0^1 \frac{(e^{-\theta s} + e^{\theta s})}{2} g_1(s)\, ds \\
&= \int_0^1 g_1(s)\, e^{-\theta} \cosh(\theta s)\, ds
\end{aligned} \tag{2.41}$$

$$\mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_1, G_4^{(2)}) = \int_0^1 g_2(s)\, e^{-\theta} \cosh(\theta s)\, ds \tag{2.42}$$

Où :

$$g_1(s) \triangleq Y_{\tau s} - \int_0^1 Y_{\tau u} du, \ \ g_2(s) \triangleq Y_{\tau(s+1)} - \int_0^1 Y_{\tau(u+1)} du$$

Et,

(2.43)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_2, G_4^{(1)}) &= \int_0^1 \left(\left(1 + \frac{1}{\theta}\right) e^{\theta(s-1)} - \frac{1}{\theta} \right) \left(g_1(s) - \theta e^{\theta s} \int_s^1 e^{-\theta u} g_1(u)\, du \right) ds \\
&= \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \mathrm{Cov}(G_1, G_4^{(1)}) - \frac{1}{\theta} \int_0^1 g_1(s)\, ds + \int_0^1 e^{\theta s} \left(\int_s^1 e^{-\theta u} g_1(u)\, du \right) ds \\
&= \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \mathrm{Cov}(G_1, G_4^{(1)}) - \frac{1}{\theta} \int_0^1 g_1(s)\, ds + \frac{1}{\theta} \int_0^1 \left(\int_s^1 e^{-\theta u} g_1(u)\, du \right) de^{\theta s} \\
&= \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \mathrm{Cov}(G_1, G_4^{(1)}) - \frac{1}{\theta} \int_0^1 g_1(s)\, ds + \frac{1}{\theta} \int_0^1 g_1(s)\, ds - \frac{1}{\theta} \int_0^1 e^{-\theta u} g_1(u)\, du \\
&= \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \mathrm{Cov}(G_1, G_4^{(1)}) - \frac{1}{\theta} \int_0^1 e^{-\theta s} g_1(s)\, ds
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_2, G_4^{(2)}) = \left(1 + \frac{1}{\theta}\right) \mathrm{Cov}(G_1, G_4^{(2)}) - \frac{1}{\theta} \int_0^1 e^{-\theta s} g_2(s)\, ds \tag{2.44}$$

(2.45)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_3, G_4^{(1)}) &= \int_0^1 \left(\left(1 + \frac{2}{\theta} + \frac{2}{\theta^2}\right) e^{\theta(s-1)} - \left(\frac{2s}{\theta} + \frac{2}{\theta^2}\right)\right) \left(g_1(s) - \theta e^{\theta s} \int_s^1 e^{-\theta u} g_1(u)\, du\right) ds \\
&= \left(1 + \frac{2}{\theta} + \frac{2}{\theta^2}\right) \mathrm{Cov}(G_1, G_4^{(1)}) - \frac{2}{\theta^2} \int_0^1 g_1(s)\, e^{-\theta s} ds - \int_0^1 \frac{2s}{\theta} g_1(s)\, ds \\
&+ \int_0^1 \left(\frac{2s}{\theta} + \frac{2}{\theta^2}\right) \theta e^{\theta s} \left(\int_s^1 e^{-\theta u} g_1(u)\, du\right) ds \\
&= \left(1 + \frac{2}{\theta} + \frac{2}{\theta^2}\right) \mathrm{Cov}(G_1, G_4^{(1)}) - \frac{2}{\theta^2} \int_0^1 g_1(s)\, e^{-\theta s} ds
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_3, G_4^{(2)}) = \left(1 + \frac{2}{\theta} + \frac{2}{\theta^2}\right) \mathrm{Cov}(G_1, G_4^{(2)}) - \frac{2}{\theta^2} \int_0^1 g_2(s)\, e^{-\theta s} ds \tag{2.46}$$

En utilisant (2.8),(2.23)-(2.34), les calculs ci-dessous se font avec mathematica :

$$-\sigma_1^2 h\theta^2 \left(-\frac{\alpha}{6} + \frac{\beta}{2}\right) \lambda_1(Y_{0:\tau}) = -h(2\theta + O(1))\mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_1, G_4^{(1)})$$

$$\sigma_2^2 \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\theta^2 \alpha\gamma\sigma_1^2}{2} \left(-\frac{\alpha}{6} + \frac{\beta}{2}\right)\right) = O\left(\frac{1}{\theta}\right),$$

$$\begin{aligned}
-\lambda_2(Y_{0:\tau}) + \frac{\theta^2\alpha\gamma\sigma_1^2}{2}\lambda_1(Y_{0:\tau}) &= \mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_1, G_4^{(1)}) \left(-\frac{1}{\gamma}\left(1 + \frac{2}{\theta} + \frac{2}{\theta^2} - \frac{\beta}{\alpha}\right) - \frac{\beta}{\alpha\gamma} + \frac{\theta^2\gamma\sigma_1^2}{2}\right) \\
&\quad + \frac{2}{\gamma\theta^2} \int_0^1 g_1(u) e^{-\theta u} du \\
&= \left(\mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_1, G_4^{(1)}) + \int_0^1 g_1(u) e^{-\theta u} du\right) \times O\left(\frac{1}{\theta}\right). \qquad (2.47)
\end{aligned}$$

Donc,

(2.48)

$$\begin{aligned}
&-\sigma_1^2 h\theta^2 \left(-\frac{\alpha}{6} + \frac{\beta}{2}\right) \lambda_1(Y_{0:\tau}) + \sigma_2^2 \left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\theta^2\alpha\gamma\sigma_1^2}{2}\left(-\frac{\alpha}{6} + \frac{\beta}{2}\right)\right) \left(-\lambda_2(Y_{0:\tau}) + \frac{\theta^2\alpha\gamma\sigma_1^2}{2}\lambda_1(Y_{0:\tau})\right) \\
&\qquad = -2h(\theta + O(1))\mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_1, G_4^{(1)}) + O\left(\frac{1}{\theta^2}\right) \int_0^1 g_1(u) e^{-\theta u} du.
\end{aligned}$$

D'autre part, la formule (2.41) peut être réécrite sous la forme :

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_1, G_4^{(1)}) &= \int_0^1 \left(Y_{\tau s} - \int_0^1 Y_{\tau u} du\right) e^{-\theta} \cosh(\theta s) ds \\
&= \left(Y_\tau - \int_0^1 Y_{\tau u} du\right) \frac{e^{-\theta}\sinh(\theta)}{\theta} - \int_0^1 \frac{e^{-\theta}\sinh(\theta s)}{\theta} dY_{\tau s} \\
&= \int_0^1 s dY_{\tau s} \times \frac{e^{-\theta}\sinh(\theta)}{\theta} - \int_0^1 \frac{e^{-\theta}\sinh(\theta s)}{\theta} dY_{\tau s}, \qquad (2.49)
\end{aligned}$$

Donc,

(2.50)

$$\begin{aligned}
&-2h(\theta + O(1))\mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_1, G_4^{(1)}) + h\int_0^1 s dY_{\tau s} = -2h(\theta + O(1)) \left(\int_0^1 s dY_{\tau s}\right) \left(\frac{1}{2\theta} - \frac{e^{-2\theta}}{2\theta}\right) \\
&\qquad + h\int_0^1 s dY_{\tau s} + 2h(\theta + O(1)) \int_0^1 \frac{e^{-\theta}\sinh(\theta s)}{\theta} dY_{\tau s}
\end{aligned}$$

$$= -\left(\int_0^1 sdY_{\tau s}\right) \times O\left(\frac{1}{\tau}\right) + 2h(\theta + O(1)) \int_0^1 \frac{e^{-\theta}\sinh(\theta s)}{\theta} dY_{\tau s}$$

Donc, en utilisant la définition de $B_1^{Y_{(n-1)\tau:n\tau}}(\theta)$, lemme 2.9 , les équations (2.48), (2.49), (2.50) (Les mêmes formules sont validées en remplaçant $Y_{0:\tau}$ par $Y_{0:2\tau}$), nous obtenons:

$$\begin{aligned} |B_1(Y_{0:\tau},\theta) - B_2(Y_{\tau:2\tau},\theta)| &\preceq \frac{1}{\tau}(h\tau^2 M + h\tau\mathcal{V}_{0,2\tau} + \mathcal{W}_{0,2\tau}) + 2h\theta\left(\frac{M\tau + \mathcal{V}_{0,2\tau} + \mathcal{W}_{0,2\tau}}{\theta}\right) \\ &\preceq Mh\tau + h\mathcal{V}_{0,2\tau} + h\mathcal{W}_{0,2\tau}\,. \end{aligned}$$

□

LEMME 2.10. *Pour tout $n \geq 1$, si $Y_{(n-1)\tau:n\tau}$ a la loi d'un mouvement brownien entre $(n-1)\tau$ et $n\tau$, alors $A_1^{Y_{(n-1)\tau:n\tau}}(\theta)$ et $B_1^{Y_{(n-1)\tau:n\tau}}(\theta)$ sont des variables gausiennes.*

DÉMONSTRATION. Considérons $A_1^{Y_{0:\tau}}(\theta)$ et $B_1^{Y_{0:\tau}}(\theta)$. Nous observons que ces deux termes peuvent s'écrire sous la forme :

$$A_1^{Y_{0:\tau}}(\theta) = h\int_0^1 (1-s)\,dY_{s\tau} + a_3(\theta)\,\lambda_3(Y_{0:\tau}) + a_2(\theta)\,\lambda_2(Y_{0:\tau}) + a_1(\theta)\,\lambda_1(Y_{0:\tau}) \tag{2.51}$$

Où :

$$\begin{cases} a_1(\theta) & \triangleq \sigma_1^2 h\theta^2\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} - a\right) \\ & +\sigma_2^2 h\theta^2\left(b - \frac{\gamma}{2} + \frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} - a\right)\right)\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2 \\ a_2(\theta) & \triangleq -\sigma_2^2 h\theta^2\left(b - \frac{\gamma}{2} + \frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{\beta}{2} - a\right)\right) \\ a_3(\theta) & \triangleq -ch\theta^2 \end{cases}$$

Et,

$$B_1^{Y_{0:\tau}}(\theta) = h\int_0^1 sdY_{s\tau} + b_2(\theta)\,\lambda_2(Y_{0:\tau}) + b_1(\theta)\,\lambda_1(Y_{0:\tau}) \tag{2.52}$$

Où :

$$\begin{cases} b_1(\theta) & \triangleq \sigma_1^2 h\theta^2\left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{2}\right) + \\ & +\sigma_2^2 h\theta^2\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\left(-\frac{\alpha}{6} + \frac{\beta}{2}\right)\right)\frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2 \\ b_2(\theta) & \triangleq -\sigma_2^2 h\theta^2\left(\frac{\gamma}{2} - \frac{\theta^2\alpha\gamma}{2}\sigma_1^2\left(-\frac{\alpha}{6} + \frac{\beta}{2}\right)\right) \end{cases}$$

En appliquant la formule d'Itô, nous avons :

$$\int_0^1 Y_{s\tau}ds = \int_0^1 (1-s)\,dY_{s\tau} \tag{2.53}$$

$$\int_0^1 Y_{s\tau}e^{-\theta s}ds = \int_0^1 \left(\frac{e^{-\theta s} - e^{-\theta}}{\theta}\right) dY_{s\tau} \tag{2.54}$$

$$\int_0^1 Y_{s\tau}e^{\theta s}ds = \int_0^1 \left(\frac{e^{\theta} - e^{\theta s}}{\theta}\right) dY_{s\tau} \tag{2.55}$$

$$\int_0^1 Y_{s\tau}\cosh(\theta s)\,ds = \int_0^1 \left(\frac{\sinh(\theta) - \sinh(s\theta)}{\theta}\right) dY_{s\tau} \tag{2.56}$$

$$\int_0^1 g_1(s)\,e^{-\theta s}ds = \int_0^1 Y_{s\tau}e^{-\theta s}ds - \left(\int_0^1 Y_{s\tau}ds\right)\int_0^1 e^{-\theta s}ds \tag{2.57}$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{e^{-\theta s} - e^{-\theta}}{\theta} - \left(\frac{1 - e^{-\theta}}{\theta} \right) (1 - s) \right) dY_{s\tau}$$

D'autre part, en utilisant les définitions (2.8) et les formule (2.41) – (2.46), (2.53) – (2.57),

$$\begin{aligned} \lambda_1 (Y_{0:\tau}) &= \frac{e^{-\theta}}{\alpha} \int_0^1 g_1 (s) \cosh (\theta s) \, ds \\ &= \frac{e^{-\theta}}{\alpha} \left(\int_0^1 Y_{s\tau} \cosh (\theta s) \, ds - \int_0^1 Y_{s\tau} ds \int_0^1 \cosh (\theta s) \, ds \right) \\ &= \frac{e^{-\theta}}{\alpha} \int_0^1 \left(\frac{\sinh (\theta) - \sinh (s\theta)}{\theta} - \frac{\sinh (\theta)}{\theta} (1 - s) \right) dY_{s\tau} \\ &= \frac{e^{-\theta}}{\alpha\theta} \int_0^1 (s \sinh (\theta) - \sinh (\theta s)) \, dY_{s\tau} \end{aligned} \tag{2.58}$$

(2.59)

$$\begin{aligned} \lambda_2 (Y_{0:\tau}) &= \frac{1}{\gamma} \mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_3, G_4^{(1)}) - \frac{\beta}{\gamma} \lambda_1 (Y_{0:\tau}) \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(\left(1 + \frac{2}{\theta} + \frac{2}{\theta^2} \right) \mathrm{Cov}(G_1, G_4^{(1)}) - \frac{2}{\theta^2} \int_0^1 g_1 (s) \, e^{-\theta s} ds \right) - \frac{\beta}{\gamma\alpha} \mathrm{Cov}^{\mathbb{Q}}(G_1, G_4^{(1)}) \\ &= \frac{1}{\gamma} \left(1 + \frac{2}{\theta} + \frac{2}{\theta^2} - \frac{\beta}{\alpha} \right) \alpha \lambda_1 (Y_{0:\tau}) - \frac{2}{\gamma\theta^2} \int_0^1 g_1 (s) \, e^{-\theta s} ds \\ &= \int_0^1 \Big(\frac{e^{-\theta}}{\gamma\theta} \left(1 + \frac{2}{\theta} + \frac{2}{\theta^2} - \frac{\beta}{\alpha} \right) (s \sinh (\theta) - \sinh (\theta s)) \\ &\quad - \frac{2}{\gamma\theta^3} \left(e^{-\theta s} - e^{-\theta} - \left(1 - e^{-\theta} \right) (1 - s) \right) \Big) dY_{s\tau} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda_3 (Y_{0:\tau}) &= \frac{1}{c} \left(\left(1 + \frac{1}{\theta} \right) \alpha - a \right) \lambda_1 (Y_{0:\tau}) - \frac{b}{c} \lambda_2 (Y_{0:\tau}) - \frac{1}{c\theta} \int_0^1 g_1 (s) \, e^{-\theta s} ds \\ &= \int_0^1 \Big(\frac{e^{-\theta}}{c\theta} \left(1 + \frac{1}{\theta} - \frac{a}{\alpha} - \frac{b}{\gamma} \left(1 + \frac{2}{\theta} + \frac{2}{\theta^2} - \frac{\beta}{\alpha} \right) \right) (s \sinh (\theta) - \sinh (\theta s)) \\ &\quad + \left(\frac{2b}{\gamma\theta} - 1 \right) \frac{1}{c\theta^2} \left(e^{-\theta s} - e^{-\theta} - \left(1 - e^{-\theta} \right) (1 - s) \right) \Big) dY_{s\tau} \end{aligned} \tag{2.60}$$

Dans les formules (2.51) , (2.52), nous remplaçons l'expression de $\lambda_1 (Y_{0:\tau}) , \lambda_2 (Y_{0:\tau}) , \lambda_3 (Y_{0:\tau})$ déterminées par (2.58) , (2.59) , (2.60). Nous obtenons que $A_1^{Y_{0:\tau}} (\theta)$ et $B_1^{Y_{0:\tau}} (\theta)$ peuvent s'écrire sous la forme d'une intégrale d'une fonction déterminée par rapport à $dY_{s\tau}$, sous l'intervale $[0, 1]$, c'est à dire :

$$A_1^{Y_{0:\tau}} (\theta) = \int_0^1 f_1 (s, \theta) \, dY_{s\tau} \tag{2.61}$$

$$B_1^{Y_{0:\tau}} (\theta) = \int_0^1 f_2 (s, \theta) \, dY_{s\tau} \tag{2.62}$$

Donc, quand $Y_{0:\tau}$ a la loi d'un mouvement brownien entre 0 et τ, alors $A_1^{Y_{0:\tau}} (\theta)$ et $B_1^{Y_{0:\tau}} (\theta)$ sont des variables gausiennes. □

2.2.2. Estimation de la fonction de vraisemblance.

LEMME 2.11. *Nous fixons Y, pour tout $n \geq 1, \forall (x,z) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\begin{cases} \psi\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}, x, z\right) & \geq \exp\left(-2M|x-z| - \tau M\left(\frac{M}{2}+1\right)\right)\widehat{\psi}(Y_{(n-1)\tau:n\tau}, x, z) \\ \\ \psi\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}, x, z\right) & \leq \exp\left(2M|x-z| + \tau M\left(\frac{M}{2}+1\right)\right)\widehat{\psi}(Y_{(n-1)\tau:n\tau}, x, z) \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Définissons la fonction F telle que :

$$F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

Par la formule d'Itô, nous avons :

$$F(X_{n\tau}) = F\left(X_{(n-1)\tau}\right) + \int_{(n-1)\tau}^{n\tau} f(X_s)\, d\hat{V}_s + \frac{1}{2}\int_{(n-1)\tau}^{n\tau} f'(X_s)\, ds$$

Donc,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}}\,|_{\mathcal{F}_{[(n-1)\tau:n\tau]}} = \exp\Bigg(& F(X_{n\tau}) - F\left(X_{(n-1)\tau}\right) + h\int_{(n-1)\tau}^{n\tau} X_s dY_s \\ & - \frac{1}{2}\int_{(n-1)\tau}^{n\tau}\left(f'(X_s) + f^2(X_s) + h^2X_s^2\right) ds\Bigg) \end{aligned}$$

Nous pouvons encadrer :

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}}\,|_{\mathcal{F}_{[(n-1)\tau:n\tau]}} \geq \exp\left(-M|X_{n\tau} - X_{(n-1)\tau}| - \frac{\tau M(M+1)}{2}\right)\widehat{\psi}(Y_{(n-1)\tau:n\tau}, X_{(n-1)\tau}, X_{n\tau})$$

Et,

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}}\,|_{\mathcal{F}_{[(n-1)\tau:n\tau]}} \leq \exp\left(M|X_{n\tau} - X_{(n-1)\tau}| + \frac{\tau M}{2}\right)\widehat{\psi}(Y_{(n-1)\tau:n\tau}, X_{(n-1)\tau}, X_{n\tau})$$

Nous obtenons donc :

$$\begin{cases} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}}\,|_{\mathcal{F}_{[(n-1)\tau:n\tau]}}\middle| X_{(n-1)\tau} = x, X_{n\tau} = z\right) & \leq \exp\left(M|z-x| + \frac{\tau M}{2}\right) \\ \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}}\,|_{\mathcal{F}_{[(n-1)\tau:n\tau]}}\middle| X_{(n-1)\tau} = x, X_{n\tau} = z\right) & \geq \exp\left(-M|z-x| - \frac{\tau M(M+1)}{2}\right) \end{cases} \tag{2.63}$$

Et,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}}\,|_{\mathcal{F}_{[(n-1)\tau:n\tau]}}\middle| X_{(n-1)\tau} = x, X_{n\tau} = z, Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right) & \\ \leq \exp\left(M|z-x| + \frac{\tau M}{2}\right)\widehat{\psi}(Y_{(n-1)\tau:n\tau}, x, z) & \end{aligned} \tag{2.64}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}}\,|_{\mathcal{F}_{[(n-1)\tau:n\tau]}}\middle| X_{(n-1)\tau} = x, X_{n\tau} = z, Y_{(n-1)\tau:n\tau}\right) & \\ \geq \exp\left(-M|z-x| - \frac{\tau M(M+1)}{2}\right)\widehat{\psi}(Y_{(n-1)\tau:n\tau}, x, z) & \end{aligned} \tag{2.65}$$

Donc, ce lemme est bien obtenu grâce aux (1.6), (2.63) – (2.65). □

En utilisant les formules (2.16) et (2.38), nous obtenons :

PROPOSITION 2.12. *Fixons Y, pour tout $n \geq 1, \forall (x,z) \in \mathbb{R}^2$,*

$$\begin{cases} \psi\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}, x, z\right) & \geq \sigma_1\sigma_2 \exp\bigg(-\tau M \left(\dfrac{M}{2}+1\right) - 2M|x-z| - A_2(\theta)\, x^2 - B_2(\theta)\, z^2 \\ & \quad + C_1(\theta)\, xz + A_1^{Y_{(n-1)\tau:n\tau}}(\theta)\, x + B_1^{Y_{(n-1)\tau:n\tau}}(\theta)\, z + C_0^{Y_{(n-1)\tau:n\tau}}(\theta) \bigg) \\ \psi\left(Y_{(n-1)\tau:n\tau}, x, z\right) & \leq \sigma_1\sigma_2 \exp\bigg(\tau M \left(\dfrac{M}{2}+1\right) + 2M|x-z| - A_2(\theta)\, x^2 - B_2(\theta)\, z^2 \\ & \quad + C_1(\theta)\, xz + A_1^{Y_{(n-1)\tau:n\tau}}(\theta)\, x + B_1^{Y_{(n-1)\tau:n\tau}}(\theta)\, z + C_0^{Y_{(n-1)\tau:n\tau}}(\theta) \bigg) \end{cases}$$

CHAPITRE 3

L'approximation robuste du filtre optimal

La stabilité joue un rôle important en étudiant l'approximation particulaire du filtre optimal. On remarque que sans stabilité, le filtre optimal $\pi_{n\tau}$ ne peut pas être approximé uniformément en temps par un système de particule parce que la borne sur l'erreur qui apparaît quant on utilise les approximations particulaires croît linéairement en temps. La stabilité du filtre optimal est difficile d'obtenir directement. Pour surmonter cette difficulté, nous allons construire un filtre robuste $\pi_{n\tau}^{\triangle}$(dépendant de paramètre $\triangle \in \mathbb{R}_+^*$) qui satisfait à la fois un rapprochement uniformément en temps de $\pi_{n\tau}$ et d'avoir la propriété de stabilité. La stabilité de $\pi_{n\tau}^{\triangle}$ nous permet de montrer que l'approximation uniformément en temps de $\pi_{n\tau}^{\triangle}$ est un filtre particulaire noté $\pi_{n\tau}^{\triangle,N}$, où N est le nombre de particule. Donc, grâce à un tel filtre robuste que nous pourrions avoir, la stabilité et l'approximation particulaire $\pi_{n\tau}^{\triangle,N}$ pour $\pi_{n\tau}$. La littérature du filtrage non-linéraire nous montre que tout va bien sur un espace compact(voir Atar et al. [**AVO99**], Del Moral et Guionnet [**MG01**], Budhiraja et Ocone [**BD97**]). Donc, il faudrait construire le filtre robuste en restreignant le filtre optimal sur un compact qui dépend de paramètre $\triangle$. L'idée est comme celle de « Oudjane et Rubenthaler » (voir [**OR05**]), nous tronquons la fonction de vraisemblance $\psi_{n\tau}$ par un compact (qui va être défini dans la suite). Ce chapitre est consacré à déterminer le filtre robuste avec ses propriétés et à établir sa stabilité.

3.1. Description du filtre rosbuste

Notons :

$$\kappa = \begin{bmatrix} A_2(\theta) & -\dfrac{C_1(\theta)}{2} \\ -\dfrac{C_1(\theta)}{2} & B_2(\theta) \end{bmatrix}. \tag{3.1}$$

Cette matrice peut être décomposée sous forme :

$$\kappa = P^T \begin{bmatrix} A_2(\theta) & 0 \\ 0 & B_2(\theta) \end{bmatrix} P. \tag{3.2}$$

Où :

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & 0 \\ p_{2,1} & p_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{C_1^2(\theta)}{4A_2(\theta)B_2(\theta)}\right)^{1/2} & 0 \\ -\frac{C_1(\theta)}{2B_2(\theta)} & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

Et,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p_{1,1}} & 0 \\ -\frac{p_{2,1}}{p_{2,2}p_{1,1}} & \frac{1}{p_{2,2}} \end{bmatrix}.$$

Dorénavant, nous supposons que les paramètres τ, h sont satisfaites, avec $\iota \in (\dfrac{1}{2}, 1)$.

HYPOTHÈSE 2. Fixons $\iota \in (\dfrac{1}{2}, 1)$, on suppose

$$B_2(\theta) \geq \frac{h}{4}, \ \frac{1-2p_{2,1}}{1+p_{2,1}} - 2B_2(\theta)\, p_{2,1}\theta^{1-\iota} > 0, \ p_{1,1} > 0, \ p_{2,1} \leq \frac{1}{2}. \tag{3.4}$$

Cette hyphothèse est possible d'arriver parce qu'à partir du lemme 2.5, nous avons: $B_2\,(\theta)\,p_{2,1} \underset{\theta\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, $p_{2,2} \underset{\theta\to+\infty}{\longrightarrow} 1$, $p_{1,1} \underset{\theta\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
Soit $\triangle > 0$, pour tout $\tau > 0$, pour tout $k \geq 0$ et pour tout b, définissons les compacts :

$$C(\Delta, b) = \{z\ :\ |2B_2\,(\theta)\,(1+p_{2,1})z - b| \leq \Delta\}\ , \tag{3.5}$$

$$C_{k+1}(\Delta) = C(\Delta, B_1^{Y_{k\tau:(k+1)\tau}}\,(\theta))\,,$$

Et,

$$m(b) = \frac{b}{2B_2\,(\theta)\,(1+p_{2,1})}\,, \tag{3.6}$$

$$m_{k+1} = m(B_1^{Y_{k\tau:(k+1)\tau}}\,(\theta))\,.$$

Nous supposons que m_0 est un point dans le support de π_0 et posons :

$$C_0(\Delta) = \left[m_0 - \frac{\Delta}{2B_2\,(\theta)\,(1+p_{2,1})}\,,\, m_0 + \frac{\Delta}{2B_2\,(\theta)\,(1+p_{2,1})}\right].$$

A partir de l'hypothèse 2 et du lemme 2.8, il existe une constante universelle C telle que :

$$|m_k - m_{k-1}| \leq \begin{cases} C(M\tau + \mathcal{V}_{(k-2)\tau,k\tau} + \mathcal{W}_{(k-2)\tau,k\tau}) & \text{if } k \geq 2\,, \\ m_0 + C(M\tau + \mathcal{V}_{0,\tau} + \mathcal{W}_{0,\tau}) & \text{if } k = 1\,. \end{cases} \tag{3.7}$$

Notons :

$$d(\Delta) = \frac{\Delta\,(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}} - 2B_2 p_{2,1}\theta^{1-\iota}\Delta - 4M, \tag{3.8}$$

Quand Δ est assez grand, la fonction $d(\Delta)$ est positive.
Définissons:

$$T(\Delta) = \frac{24Ch\sqrt{\tau}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^{1-\iota}\Delta}{6C\sqrt{2\tau}}\right)^2\right)}{\theta^{1-\iota}\Delta\sqrt{\pi}} + \left(8M\frac{|1+p_{2,1}|}{p_{1,1}} + 2\sqrt{\pi A_2}\right) \times \sigma_1\sigma_2 p_{1,1}\frac{8B_2 e^{\frac{49}{2}M^2\tau + \frac{\tau M}{2}(3M+7) + 4\left|M^2(1,-1)\kappa^{-1}(1,-1)^T\right|}}{d(\Delta)}\exp\left(-\frac{1}{4B_2}d(\Delta)^2\right) \tag{3.9}$$

Hypothèse 3. Supposons que le support de π_0 est compact et que m_0 est choisi telque :

$$\pi_0(C_0(\Delta)^{\complement}) \preceq T(\Delta)\,,$$

Pour tout $\triangle$ assez grand.

Pour tous $k \geq 1, \tau > 0$, pour tous x et x' dans $\mathbb{R}$, définissons :

$$\psi_k^{\Delta}(x, x') = \psi_{k\tau}(x, x')\mathbb{1}_{C_k(\Delta)}(x')\,, \tag{3.10}$$

Et,

$$D_k = |m_k - m_{k-1}|\,, \tag{3.11}$$

Pour tout $D \geq 0$,

$$\xi_1(D, \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{\left(D + \frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})}\right)^2}{2\tau}\right)\exp\left(-M\left(D + \frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})}\right) - \frac{\tau M\,(M+1)}{2}\right)\,, \tag{3.12}$$

$$\xi_2(D, \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}}\exp\left(-\frac{\left(\left(D - \frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})}\right)_+\right)^2}{2\tau}\right)\exp\left(M\left(D + \frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})}\right) + \frac{\tau M}{2}\right)\,, \tag{3.13}$$

On définit :

$$R^{\triangle}_{k+1}(x, dx') = \begin{cases} \psi^{\Delta}_{k+1}(x, x')Q(x, dx') & \text{si } x \in C_k(\Delta)\,, \\ \psi^{\Delta}_{k+1}(x, x')\xi_1(D_{k+1}, \Delta)dx' & \text{si } x \notin C_k(\Delta)\,. \end{cases} \tag{3.14}$$

Le filtre robuste $\left(\pi^{\triangle}_{n\tau}\right)_{n\geq 0}$ est défini par :

$$\begin{cases} \pi^{\Delta}_0 = \pi_0 \\ \pi^{\Delta}_{k\tau} = \overline{R}^{\Delta}_k \circ \overline{R}^{\Delta}_{k-1} \circ \cdots \circ \overline{R}^{\Delta}_1(\pi_0) \quad \text{pour tout } k \geq 1\,. \end{cases} \tag{3.15}$$

3.2. La nouvelle représentation pour le filtre robuste

Au chapitre 2, dans la subsection 1.2.3, nous avons indiqué que s'il existe une chaîne de Markov avec un noyau mélangeant telle que la formule (1.3) est vérifiée, alors nous pouvons obtenir la stabilité pour le filtre (grâce à la proposition 1.1). Cette section a donc pour but de construire une chaîne de Markov mélangeant telle que notre filtre robuste vérifie la formule (1.3).

3.2.1. La construction de la chaîne de Markov. Fixons Y. Pour tous $x = (x_1, x_2)\,, x' = (x'_1, x'_2) \in \mathbb{R}^2$, k et n dans $\mathbb{N}^*$, $n \geq k$, définissons :
(3.16)

$$\forall k \geq 2, \widetilde{R}^{\Delta}_k(x, dx') = \begin{cases} \mathbb{1}_{C_{k-1}(\Delta)}(x'_1)\psi^{\Delta}_k(x')\widetilde{Q}^2(x, dx') & \text{si } x_2 \in C_{k-2}(\Delta) \\ \mathbb{1}_{C_{k-1}(\Delta)}(x'_1)\psi^{\Delta}_k(x')\xi_1(D_{k-1}, \Delta)Q\left(x'_1, x'_2\right) dx'_1 dx'_2 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\psi^{\Delta}_{2n|2k}(x) = \begin{cases} \widetilde{R}^{\Delta}_{2n} \circ \widetilde{R}^{\Delta}_{2n-2} \circ \cdots \circ \widetilde{R}^{\Delta}_{2k+2}(x, \mathbb{R}^2) & \text{si } k \leq n-1\,, \\ 1 & \text{si } k = n\,, \end{cases}$$

$$S^{\Delta}_{2n|2k}(x, dx') = \begin{cases} \dfrac{\psi^{\Delta}_{2n|2k+2}(x')}{\psi^{\Delta}_{2n|2k}(x)}\widetilde{R}^{\Delta}_{2k+2}(x, dx') & \text{si } k \leq n-1\,, \\ dx' & \text{si } k = n-1\,. \end{cases}$$

Ci-dessus, nous utilisons les mêmes notations utilisées dans [**MG01**]. Q a la densité par rapport à une mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, donc $S^{\Delta}_{2n|2k}(x, dx')$ a la densité par rapport à une mesure de Lesbegue sur $\mathbb{R}^2$. Notons cette densité par : $(x, x') \in \mathbb{R}^2 \mapsto S^{\Delta}_{2n|2k}(x, x')$. Nous définissons $\psi^{\Delta,p}_{2n|2k}(x)$ et $S^{\Delta,p}_{2n|2k}(x, dx')$ de la même façon que de définir $\psi^{\Delta}_{2n|2k}(x)$ et $S^{\Delta}_{2n|2k}(x, dx')$ sauf qu'on remplace ψ^{Δ}_n par 1. Notons aussi $(x, x') \in \mathbb{R}^2 \mapsto S^{\Delta,p}_{2n|2k}(x, x')$ la densité de $S^{\Delta,p}_{2n|2k}(x, dx')$.

LEMME 3.1. *Fixons n, $k \in \mathbb{N}$, pour toutes $x = (x_1, x_2)\,, x' = (x'_1, x'_2) \in \mathbb{R}^2$, $n \geq k \geq 0$. Nous savons que $S^{\triangle}_{2n|2k}\left(x_1, x_2, x'_1, x'_2\right)$ et $S^{\Delta,p}_{2n|2k}\left(x_1, x_2, x'_1, x'_2\right)$ ne dépendent pas de x_1.*

DÉMONSTRATION. A partir du lemme 1.4, nous avons :

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}^2\left(\left(x_1, x_2\right), d\left(x'_1, x'_2\right)\right) &= \int_{(y_1,y_2)} \widetilde{Q}\left(x_1, x_2, dy_1, dy_2\right) \widetilde{Q}\left(y_1, y_2, dx'_1, dx'_2\right) \\ &= \int_{(y_1,y_2)} Q\left(y_1, dy_2\right) \delta_{x_2}\left(dy_1\right) Q\left(x'_1, dx'_2\right) \delta_{y_2}\left(dx'_1\right) \\ &= Q\left(x'_1, dx'_2\right) \int_{y_2} \left(\int_{y_1} Q\left(y_1, dy_2\right) \delta_{x_2}\left(dy_1\right)\right) \delta_{y_2}\left(dx'_1\right) \\ &= Q\left(x'_1, dx'_2\right) \int_{y_2} Q\left(x_2, dy_2\right) \delta_{y_2}\left(dx'_1\right) \end{aligned} \tag{3.17}$$

D'autre part, pour toute fonction test f, nous avons :

$$\begin{aligned} \int_{y_2} Q\left(x_2, dy_2\right) \delta_{y_2}\left(f\right) &= \int_{x'_1} f\left(x'_1\right) \int_{y_2} Q\left(x_2, dy_2\right) \delta_{y_2}\left(dx'_1\right) \\ &= \int_{y_2} f\left(y_2\right) Q\left(x_2, dy_2\right) \end{aligned}$$

$$= Q\left(x_2, f\right)$$

Autrement dit,

$$\int_{y_2} Q\left(x_2, dy_2\right) \delta_{y_2}\left(dx'_1\right) = Q\left(x_2, dx'_1\right) \tag{3.18}$$

En combinant (3.17)et (3.18), nous obtenons :

$$\widetilde{Q}^2\left(\left(x_1, x_2\right), d\left(x'_1, x'_2\right)\right) = Q\left(x'_1, dx'_2\right) Q\left(x_2, dx'_1\right) \tag{3.19}$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned} \psi^{\triangle}_{2n|2k}\left(x_1, x_2\right) &= \widetilde{R}^{\triangle}_{2n} \circ \widetilde{R}^{\triangle}_{2(n-1)} \circ \ldots \circ \widetilde{R}^{\triangle}_{2k+2}\left(x, \mathbb{R}^2\right) \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^2} \widetilde{R}^{\triangle}_{2n} \circ \widetilde{R}^{\triangle}_{2(n-1)} \circ \ldots \circ \widetilde{R}^{\triangle}_{2k+2}\left(x, dy\right) \\ &= \int_{y \in \mathbb{R}^2} \int_{x' \in \mathbb{R}^2} \widetilde{R}^{\triangle}_{2k+2}\left(x, dx'\right) \widetilde{R}^{\triangle}_{2n} \circ R^{\triangle}_{2(n-1)} \circ \ldots \circ \widetilde{R}^{\triangle}_{2k+4}\left(x', dy\right) \\ &= \int_{x' \in \mathbb{R}^2} \widetilde{R}^{\triangle}_{2k+2}\left(x, dx'\right) \int_{y \in \mathbb{R}^2} \widetilde{R}^{\triangle}_{2n} \circ \widetilde{R}^{\triangle}_{2(n-1)} \circ \ldots \circ \widetilde{R}^{\triangle}_{2k+4}\left(x', dy\right) \\ &= \int_{x' \in \mathbb{R}^2} \psi^{\triangle}_{2n\tau|2k+2}\left(x'\right) \widetilde{R}^{\triangle}_{2k+2}\left(x, dx'\right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

En utilisant (3.19) et la définition de $\widetilde{R}^{\triangle}_{k}$, nous savons que $\widetilde{R}^{\triangle}_{2k+2}\left(x_1, x_2, dx'_1, dx'_2\right)$ ne dépend pas de x_1. Donc, la formule (3.20) nous confirme que $\psi^{\triangle}_{2n|2k}\left(x_1, x_2\right)$ ne dépend que de x_2, nous obtenons tout de suite le fait que $S^{\triangle}_{2n|2k}\left(x_1, x_2, x'_1, x'_2\right)$ ne dépend que de x_2, x'_1, x'_2. □

Pour tout $D > 0$, posons :

$$\epsilon(D, \Delta) = \sqrt{\frac{\xi_1(D, \Delta)}{\xi_2(D, \Delta)}}\,, \tag{3.21}$$

Pour tout k dans $\mathbb{N}$, notons :

$$\epsilon_k = \epsilon(D_k, \Delta)\,.$$

Le lemme ci-dessous nous donne de plus des propriétés sur les noyaux $S^{\triangle}_{2n|2k}$ et $S^{\triangle,p}_{2n|2k}$. Plus précisément, ces noyaux sont des opérateurs Markoviens et contractants sous la norme variation totale.

LEMME 3.2. *Pour tout $k \leq n-1$, le noyau $S^{\triangle}_{2n|2k}$ est markovien et est contractant avec le taux de contraction qui est $\left(1 - \epsilon^2_{2k+1}\right)$ sous la norme variation totale. Le noyau $S^{\triangle,p}_{2n|2k}$ est markovien et est contractant avec le taux de contraction qui est $\left(1 - \epsilon^2_{2k+1}\right)$ sous la norme variation totale.*

DÉMONSTRATION. On va écrire la démonstration pour $S^{\triangle}_{2n|2k}$ et en faisant de la même manière nous obtenons la démonstration pour $S^{\triangle,p}_{2n|2k}$. Pour toute mesure probabilité μ sur $\mathbb{R}^2$, ainsi que pour tout $k \leq n-1$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \mu(dx) S^{\Delta}_{2n|2k}(x, dx') &= \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \mu(dx) \frac{\psi^{\Delta}_{2n|2k+2}(x')}{\psi^{\Delta}_{2n|2k}(x)} \widetilde{R}^{\Delta}_{2k+2}(x, dx') \\ &= \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \mu(dx) \frac{\widetilde{R}^{\Delta}_{2n} \circ \cdots \circ \widetilde{R}^{\Delta}_{2k+4}(x', \mathbb{R}^2)}{\widetilde{R}^{\Delta}_{2n} \circ \cdots \circ \widetilde{R}^{\Delta}_{2k+2}(x, \mathbb{R}^2)} \widetilde{R}^{\Delta}_{2k+2}(x, dx') \\ &\overset{Fubini}{=} \int_{\mathbb{R}^2} \mu(dx) \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\widetilde{R}^{\Delta}_{2n} \circ \cdots \circ \widetilde{R}^{\Delta}_{2k+4}(x', \mathbb{R}^2) \widetilde{R}^{\Delta}_{2k+2}(x, dx')}{\widetilde{R}^{\Delta}_{2n} \circ \cdots \circ \widetilde{R}^{\Delta}_{2k+2}(x, \mathbb{R}^2)} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \mu(dx) = 1\,. \end{aligned}$$

$S^{\triangle}_{2n|2k}$ est un opérateur markovien.
Pour tout $k \geq 1$ et pour tous x_1, x_2 dans $\mathbb{R}$. Notons :

$$\lambda_k(dx_1, dx_2) = \mathbb{1}_{C_{k-1}(\Delta)}(x_1)\mathbb{1}_{C_k(\Delta)}(x_2)\psi_k(x_1, x_2)Q\,(x_1, x_2)\,dx_1dx_2$$

A partir de la proposition 2.1, pour tous $x_1 \in C_{k-2}\,(\Delta)$, $x_2 \in C_{k-1}\,(\Delta)$, nous avons :

$$\xi_1(D_{k-1}, \Delta) \leq Q\,(x_1, x_2) \leq \xi_2(D_{k-1}, \Delta)$$

Donc, à partir de la définition (3.16), pour tous x_1, x_2, z_1, z_2 dans $\mathbb{R}$ et $k \geq 2$, nous avons :

$$\xi_1(D_{k-1}, \Delta)\lambda_k(dz_1, dz_2) \leq \widetilde{R}^{\Delta}_k(x_1, x_2, dz_1, dz_2) \leq \xi_2(D_{k-1}, \Delta)\lambda_k(dz_1, dz_2)\,.$$

En notant que pour tout $k \leq n-1$, $\psi^{\Delta}_{2n|2k}(x) = \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}(\widetilde{R}^{\Delta}_{2n}\ldots\widetilde{R}^{\Delta}_{2k+4})(y, dz)\widetilde{R}^{\Delta}_{2k+2}(x, dy)$, nous obtenons :

$$\psi^{\Delta}_{2n|2k}(x) \leq \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}(\widetilde{R}^{\Delta}_{2n}\ldots\widetilde{R}^{\Delta}_{2k+4})(y, dz)\xi_2(D_{2k+1}, \Delta)\lambda_{2k+2}(dy)\,,$$

Donc, en remarquant que pour tout $k \leq n-1$, $S^{\Delta}_{2n|2k}(x, dx') = \dfrac{\psi^{\Delta}_{2n|2k+2}(x')}{\psi^{\Delta}_{2n|2k}(x)}\widetilde{R}^{\Delta}_{2k+2}(x, dx')$, on obtient :

$$S^{\Delta}_{2n|2k}(x, dx') \geq \frac{\xi_1(D_{2k+1}, \Delta)}{\xi_2(D_{2k+1}, \Delta)} \times \frac{\widetilde{R}^{\Delta}_{2n:2k+4}(x', \mathbb{R}^2)\lambda_{2k+2}(dx')}{\int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{R}^{\Delta}_{2n:2k+4}(y, \mathbb{R}^2)\lambda_{2k+2}(dy)}\,. \tag{3.22}$$

En faisant similairement, nous obtenons :

$$S^{\Delta}_{2n|2k}(x, dx') \leq \frac{\xi_2(D_{2k+1}, \Delta)}{\xi_1(D_{2k+1}, \Delta)} \times \frac{\widetilde{R}^{\Delta}_{2n:2k+4}(x', \mathbb{R}^2)\lambda_{2k+2}(dx')}{\int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{R}^{\Delta}_{2n:2k+4}(y, \mathbb{R}^2)\lambda_{2k+2}(dy)}\,. \tag{3.23}$$

Les inégalités (3.22) et (3.23) nous confirment que $S^{\Delta}_{2n|2k}$ est un noyau mélangeant de coefficient de mélange ϵ^2_{2k+1}. Donc, à partir de **[OR05]**, page 430 (et de **[MG01]**), nous obtenons que $S^{\Delta}_{2n|2k}$ est contractante avec le taux de contraction qui est $\left(1-\epsilon^2_{2k+1}\right)$ sous la norme variation totale. □

Notons $Z_0 = \left(0, Z^{(2)}_0\right)$, où $Z^{(2)}_0$ est une variable aléatoire. Définissons $\left(Z_{2k} = \left(Z^{(1)}_{2k}, Z^{(2)}_{2k}\right)\right)_{0\leq k\leq n}$ une chaîne de Markov non-homogène avec les noyaux de transition $S^{\Delta}_{2n|0}$, $S^{\Delta}_{2n|2}$, $\ldots$, *i.e*, la loi de Z_{2k} sachant la loi de Z_{2k-2} est $S^{\Delta}_{2n|2k-2}\,(Z_{2k-2}, .)$. On suppose que le support de $Z^{(2)}_0$ est un sous-ensemble de $C_0\,(\Delta)$ et notons que $Z^{(1)}_{2k}$ prend valeur dans $C_{2k-1}\,(\Delta)$ et $Z^{(2)}_{2k}$ prend valeur dans $C_{2k}\,(\Delta)$.
Définissons en plus $\left(Z^{(p)}_{2k} = \left(Z^{(p)(1)}_{2k}, Z^{(p)(2)}_{2k}\right)\right)_{0\leq k\leq n}$ une chaîne de Markov non-homogène avec $Z^{(p)}_0 = Z_0$ et les noyaux de transition $S^{\Delta,(p)}_{2n|0}$, $S^{\Delta,(p)}_{2n|2}$, $\ldots$, $S^{\Delta,(p)}_{2n|2n-2}$. Posons : $U_{2k+1} = \left(Z^{(2)}_{2k}, Z^{(1)}_{2k+2}\right)$ pour tout $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ et $U^{(1)}_{2n+1} = Z^{(2)}_{2n}$. Posons: $U^{(p)}_{2k+1} = (Z^{(p)(2)}_{2k}, Z^{(p)(1)}_{2k+2})$ pour $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Ces nouvelles suites forment des nouvelles chaînes de Markov.

Lemme 3.3. *La suite $(U_1, U_3, \ldots, U_{2n-1}, U^{(1)}_{2n+1})$ est une chaîne de Markov non-homogène. La suite $(U^{(p)}_1, U^{(p)}_2, \ldots, U^{(p)}_{2n-1})$ est une chaîne de Markov non-homogène.*

Démonstration. Nous allons montrer la propriété markovienne pour la suite $U_1, \ldots, U_{2n-1}, U^{(1)}_{2n+1}$ et nous faisons pareillement pour la suite $U^{(p)}_1$, $U^{(p)}_3, \ldots, U^{(p)}_{2n-1}$. Prenons une fonction test φ dans $\mathcal{C}^+_b(\mathbb{R}^2)$. Pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, et pour tous $z^{(2)}_0, z^{(1)}_2, \ldots, z^{(1)}_{2k}$ dans $\mathbb{R}$, nous avons:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(U_{2k+1})|U_1 = (z^{(2)}_0, z^{(1)}_2), \ldots, U_{2k-1} = (z^{(2)}_{2k-2}, z^{(1)}_{2k})) = \\ \mathbb{E}(\varphi(Z^{(2)}_{2k}, Z^{(1)}_{2k+2})|Z^{(2)}_0 = z^{(2)}_0, \ldots, Z^{(2)}_{2k-2} = z^{(2)}_{2k-2}, Z^{(1)}_{2k} = z^{(1)}_{2k})\end{aligned}$$

Selon le lemme 3.1, $S^{\triangle}_{2n|2k}$ ne dépend pas de première composante, on peut noter :

$$\theta^{\varphi}\left(z_{2k-2}^{(2)}, z_{2k}^{(1)}\right) \triangleq \frac{1}{\int_{\mathbb{R}} S_{2n|2k-2}^{\triangle}\left(z_{2k-2}^{(1)}, z_{2k-2}^{(2)}, z_{2k}^{(1)}, z_{2k}^{(2)}\right) dz_{2k}^{(2)}} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi\left(z_{2k}^{(2)}, z_{2k+2}^{(1)}\right)$$

$$S_{2n|2k-2}^{\triangle}\left(z_{2k-2}^{(1)}, z_{2k-2}^{(2)}, z_{2k}^{(1)}, z_{2k}^{(2)}\right)\left(\int_{\mathbb{R}} S_{2n|2k}^{\triangle}\left(z_{2k}^{(1)}, z_{2k}^{(2)}, z_{2k+2}^{(1)}, z_{2k+2}^{(2)}\right) dz_{2k+2}^{(2)}\right) dz_{2k}^{(2)} dz_{2k+2}^{(1)}$$

On obtient donc (voir la preuve complémentaire A.1) :

$$\mathbb{E}\left(\varphi\left(U_{2k+1}\right) \mid U_1 = (z_0^{(2)}, z_2^{(1)}), \ldots, U_{2k-1} = (z_{2k-2}^{(2)}, z_{2k}^{(1)})\right) = \theta^{\varphi}\left(z_{2k-2}^{(2)}, z_{2k}^{(1)}\right)$$

Nous faisons les mêmes calculs pour $\mathbb{E}\left(\varphi\left(U_{2n+1}^{(1)}\right) \mid U_1, \ldots, U_{2n-1}\right)$. Donc, $U_1, \ldots, U_{2n-1}, U_{2n+1}^{(1)}$ est une chaîne de Markov. $\square$

3.2.2. La propriété mélangeante. Notons $S_{2n|2k+1}^{U}$ pour le noyau de transition entre U_{2k-1} et U_{2k+1} (pour tout $k = 1, 2, \ldots, n-1$), et $S_{2n|2n+1}^{U}$pour le noyau de transition entre U_{2n-1} et $U_{2n+1}^{(1)}$. On note $S_{2n|2k+1}^{(p)U}$ pour le noyau de transition entre $U_{2k-1}^{(p)}$ et $U_{2k+1}^{(p)}$ (pour tout $k = 1, 2, \ldots, n-1$). Posons:

(3.24)

$$\epsilon'(D, \Delta) = \exp\left(-\left(2M + \Delta|p_{2,1}|\right)\left(\frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})} + D\right) - B_2 p_{2,1}^2\left(\frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})} + D\right)^2\right),$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\epsilon_k' = \epsilon'(|m_k - m_{k-1}|, \Delta).$$

PROPOSITION 3.4. *Pour tout $k = 1, 2, \ldots, n$, le noyau $S_{2n|2k+1}^{U}$ est mélangeant avec le coefficient de mélange qui est $e^{-\tau M(M+2)}\epsilon_{2k-1}^4\left(\epsilon_{2k}\epsilon_{2k}'\right)^2$. Pour tout $k = 1, 2, \ldots, n-1$, le noyau $S_{2n|2k+1}^{(p)U}$ est mélangeant avec le coefficient de mélange qui est $e^{-\tau M(M+2)}\epsilon_{2k-1}^4\left(\epsilon_{2k}\epsilon_{2k}'\right)^2$.*

Avant de montrer la proposition ci-dessus, nous avons besoin d'introduire un lemme technique. Pour simplifier les calculs, notons que avec pour tout t_1, t_2, x, z dans $\mathbb{R}$,

$$\begin{pmatrix} t_1' \\ t_2' \end{pmatrix} = (P^{-1})^T \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix},$$

$$M_1 = \frac{2M(|1-p_{2,1}|)}{p_{1,1}}.$$

LEMME 3.5. *Supposons que, pour tout $D \geq 0$,*

$$|x - z| \leq D,$$

$$|2B_2(\theta)(p_{1,2}+1)z - t_2'| \leq \Delta$$

Alors,

$$\exp\left(-\frac{1}{4B_2(\theta)}(t_2' - 2B_2(p_{2,1}+1)z)^2 - B_2(\theta)p_{2,1}^2 D^2 - \Delta|p_{2,1}|D\right)$$

$$\leq \exp\left(-\frac{1}{4B_2(\theta)}(t_2' - 2B_2(\theta)(p_{2,1}x + z))^2\right)$$

$$\leq \exp\left(-\frac{1}{4B_2(\theta)}(t_2' - 2B_2(\theta)(p_{2,1}+1)z)^2 + B_2(\theta)p_{2,1}^2 D^2 + |p_{2,1}|D\Delta\right).$$

DÉMONSTRATION. Pour tous a et b dans $\mathbb{R}$, l'inégalité suivante est évidente : $\exp(-(a-b)^2) \leq \exp(-a^2 + b^2 + 2|ab|)$. Donc, en l'utilisant, nous obtenons :

$$\exp\left(-\frac{1}{4B_2(\theta)}(t_2' - 2B_2(\theta)(p_{2,1}x + z))^2\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{4B_2(\theta)}(t_2' - 2B_2(\theta)(p_{2,1}+1)z) + 2B_2(\theta)p_{2,1}(z-x))^2\right)$$

$$\leq \exp\left(-\frac{1}{4B_2(\theta)}(t_2' - 2B_2(\theta)(p_{2,1}+1)z)^2 + B_2(\theta)\,p_{2,1}^2(z-x)^2 + |p_{2,1}(z-x)||t_2' - 2B_2(\theta)(p_{2,1}+1)z|\right)$$
$$\leq \exp\left(-\frac{1}{4B_2(\theta)}(t_2' - 2B_2(\theta)(p_{2,1}+1)z)^2 + B_2(\theta)\,p_{2,1}^2 D^2 + |p_{2,1}|\,D\Delta\right)$$

Et,

$$\exp\left(-\frac{1}{4B_2(\theta)}(t_2' - 2B_2(\theta)(p_{2,1}x + p_{2,2}z))^2\right)$$
$$\geq \exp\left(-\frac{1}{4B_2(\theta)}(t_2' - 2B_2(\theta)(p_{2,1}+1)z)^2 - B_2(\theta)\,p_{2,1}^2(z-x)^2 - |p_{2,1}(z-x)||t_2' - 2B_2(\theta)(p_{2,1}+1)z|\right)$$
$$\geq \exp\left(-\frac{1}{4B_2(\theta)}(t_2' - 2B_2(\theta)(p_{2,1}+1)z)^2 - B_2(\theta)\,p_{2,1}^2 D^2 - |p_{2,1}|\,D\Delta\right)$$

□

Remarque 3.6. Dorénavant, on réécrit : $A_1^{Y(k-1)\tau:k\tau}(\theta) = A_1^{Y(k-1)\tau:k\tau}$, $B_1^{Y(k-1)\tau:k\tau}(\theta) = B_1^{Y(k-1)\tau:k\tau}$, $A_2(\theta) = A_2$, $B_2(\theta) = B_2$, $C_1(\theta) = C_1$, $C_0^{Y(k-1)\tau:k\tau}(\theta) = C_0^{Y(k-1)\tau:k\tau}$.

Démonstration de la proposition 3.4. Nous allons écrire la preuve pour $S^U_{2n|2k+1}$ avec pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$, l'autre cas doit être fait de la même manière. Soit φ une fonction test(dans $\mathcal{C}_b^+(\mathbb{R}^2)$). A partir de (3.22), (3.23), nous obtenons :

$$\frac{S^\Delta_{2n|2k-2}((z, z^{(2)}_{2k-2}), (z^{(1)}_{2k}, z^{(2)}_{2k}))}{\int_{\mathbb{R}} S^\Delta_{2n|2k-2}((z, z^{(2)}_{2k-2}), (z^{(1)}_{2k}, z'))dz'} \geq$$
$$\geq \epsilon^4_{2k-1}\frac{\widetilde{R}^\Delta_{2n:2k+2}((z^{(1)}_{2k}, z^{(2)}_{2k}), \mathbb{R}^2)\mathbb{1}_{C_{2k-1}(\Delta)}(z^{(1)}_{2k})\mathbb{1}_{C_{2k}(\Delta)}(z^{(2)}_{2k})\psi_{2k}(z^{(1)}_{2k}, z^{(2)}_{2k})Q\left(z^{(1)}_{2k}, z^{(2)}_{2k}\right)}{\int_{\mathbb{R}} \widetilde{R}_{2n:2k+2}((z^{(1)}_{2k}, z'), \mathbb{R}^2)\mathbb{1}_{C_{2k-1}(\Delta)}(z^{(1)}_{2k})\mathbb{1}_{C_{2k}(\Delta)}(z')\psi_{2k}(z^{(1)}_{2k}, z')Q\left(z^{(1)}_{2k}, z'\right)dz'}$$

Donc, pour tout $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, pour tous $z^{(2)}_{2k-2} \in C_{2k-2}(\Delta)$ et $z^{(1)}_{2k} \in C_{2k-1}(\Delta)$, nous avons :

$$\mathbb{E}(\varphi(U_{2k+1})|U_{2k-1} = (z^{(2)}_{2k-2}, z^{(1)}_{2k})) = \theta^\varphi\left(z^{(2)}_{2k-2}, z^{(1)}_{2k}\right) \geq \epsilon^4_{2k-1} \tag{3.25}$$
$$\times \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(z^{(2)}_{2k}, z^{(1)}_{2k+2})\frac{\widetilde{R}^\Delta_{2n:2k+2}((z^{(1)}_{2k}, z^{(2)}_{2k}), \mathbb{R}^2)\mathbb{1}_{C_{2k-1}(\Delta)}(z^{(1)}_{2k})\mathbb{1}_{C_{2k}(\Delta)}(z^{(2)}_{2k})\psi_{2k}(z^{(1)}_{2k}, z^{(2)}_{2k})Q\left(z^{(1)}_{2k}, z^{(2)}_{2k}\right)}{\int_{\mathbb{R}} \widetilde{R}_{2n:2k}((z^{(1)}_{2k}, z'), \mathbb{R}^2)\mathbb{1}_{C_{2k-1}(\Delta)}(z^{(1)}_{2k})\mathbb{1}_{C_{2k}(\Delta)}(z')\psi_{2k}(z^{(1)}_{2k}, z')Q\left(z^{(1)}_{2k}, z^{(2)}_{2k}\right)dz'}$$
$$\times\left(\int_{\mathbb{R}} S^\Delta_{2n|2k}((z^{(1)}_{2k}, z^{(2)}_{2k}), (z^{(1)}_{2k+2}, z^{(2)}_{2k+2})dz^{(2)}_{2k+2}\right)dz^{(2)}_{2k}dz^{(1)}_{2k+2}$$

A partir de la proposition 2.12, pour tous $z^{(1)}_{2k} \in C_{2k-1}(\Delta)$ et $z^{(2)}_{2k} \in C_{2k}(\Delta)$, nous obtenons :

$$\psi_{2k}(z^{(1)}_{2k}, z^{(2)}_{2k}) \geq \sigma_1\sigma_2\exp\left(-2M|z^{(1)}_{2k} - z^{(2)}_{2k}| - \tau M\left(\frac{M}{2}+1\right)\right) \tag{3.26}$$
$$\times\exp\left(-A_2(z^{(1)}_{2k})^2 - B_2(z^{(2)}_{2k})^2 + C_1 z^{(1)}_{2k}z^{(2)}_{2k} + A_1^{Y(2k-1)\tau:2k\tau}z^{(1)}_{2k} + B_1^{Y(2k-1)\tau:2k\tau}z^{(2)}_{2k} + C_0^{Y(2k-1)\tau:2k\tau}\right)$$
$$= \sigma_1\sigma_2\exp\left(-2M|z^{(1)}_{2k} - z^{(2)}_{2k}| - \frac{\tau M}{2}(M+2) + \frac{1}{4A_2}\left(\frac{A_1^{Y(2k-1)\tau:2k\tau} - p_{2,1}B_1^{Y(2k-1)\tau:2k\tau}}{p_{1,1}}\right)^2\right)$$
$$\times\exp\left(\frac{1}{4B_2}\left(B_1^{Y(2k-1)\tau:2k\tau}\right)^2 - \frac{1}{4A_2}\left(\frac{A_1^{Y(2k-1)\tau:2k\tau} - p_{2,1}B_1^{Y(2k-1)\tau:2k\tau}}{p_{1,1}} - 2A_2p_{1,1}z^{(1)}_{2k}\right)^2\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4B_2}\left(B_1^{Y(2k-1)\tau:2k\tau} - 2B_2(p_{2,1}z^{(1)}_{2k} + z^{(2)}_{2k})\right)^2 + C_0^{Y(2k-1)\tau:2k\tau}\right)$$

$$\geq \text{(à partir du lemma 3.5)}\ \sigma_1\sigma_2 \exp\left(-\frac{\tau M}{2}(M+2)\right)$$
$$\times \exp\left(\frac{1}{4A_2}\left(\frac{A_1^{Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}} - p_{2,1}B_1^{Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}}}{p_{1,1}}\right)^2 + \frac{1}{4B_2}\left(B_1^{Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}}\right)^2 + C_0^{Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}}\right)$$
$$\times \exp\left(-\frac{1}{4A_2}\left(\frac{A_1^{Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}}}{p_{1,1}} - \frac{p_{2,1}B_1^{Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}}}{p_{1,1}} - 2A_2p_{1,1}z_{2k}^{(1)}\right)^2\right.$$
$$- \frac{1}{4B_2}\left(B_1^{Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}} - 2B_2(p_{2,1}+1)z_{2k}^{(2)}\right)^2$$
$$\left.-B_2p_{2,1}^2(z_{2k}^{(1)} - z_{2k}^{(2)})^2 - (2M + \Delta|p_{2,1}|)\,|z_{2k}^{(1)} - z_{2k}^{(2)}|\right).$$

Posons:

$$\psi_{2k}^{(1)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{4A_2}\left(\frac{A_1^{Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}}}{p_{1,1}} - \frac{p_{2,1}B_1^{Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}}}{p_{1,1}} - 2A_2p_{1,1}x\right)^2\right),$$

$$\psi_{2k}^{(2)}(x) = \exp\left(-\frac{1}{4B_2}\left(B_1^{Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}} - 2B_2(p_{2,1}+1)x\right)^2\right)$$

$$\epsilon_1\left(Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}\right) = \sigma_1\sigma_2 \exp\left(\frac{1}{4A_2}\left(\frac{A_1^{Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}} - p_{2,1}B_1^{Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}}}{p_{1,1}}\right)^2 + \frac{1}{4B_2}\left(B_1^{Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}}\right)^2\right.$$
$$+ C_0^{Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}} - (2M + \Delta|p_{2,1}|)\left(\frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})} + D_{2k}\right)$$
$$\left. - B_2p_{2,1}^2\left(\frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})} + D_{2k}\right)^2\right)$$

Parce que :

$$\begin{aligned}
|z_{2k}^{(1)} - z_{2k}^{(2)}| &= |z_{2k}^{(1)} - m_{2k-1} - \left(z_{2k}^{(2)} - m_{2k}\right) + m_{2k-1} - m_{2k}| \\
&\leq \frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})} + |m_{2k-1} - m_{2k}| \\
&= \frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})} + D_{2k}
\end{aligned}$$

Donc, grâce à (3.26), nous obtenons:

$$\psi_{2k}(z_{2k}^{(1)}, z_{2k}^{(2)}) \geq \exp\left(-\frac{\tau M}{2}(M+2)\right)\epsilon_1\left(Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}\right)\psi_{2k}^{(1)}(z_{2k}^{(1)})\psi_{2k}^{(2)}(z_{2k}^{(2)}) \tag{3.27}$$

Faisons de même pour,

$$\psi_{2k}(z_{2k}^{(1)}, z_{2k}^{(2)}) \leq \exp\left(\frac{\tau M}{2}(M+2)\right)\epsilon_2\left(Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}\right)\psi_{2k}^{(1)}(z_{2k}^{(1)})\psi_{2k}^{(2)}(z_{2k}^{(2)}) \tag{3.28}$$

Où :

$$\epsilon_2\left(Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}\right) = \sigma_1\sigma_2 \exp\left(\frac{1}{4A_2}\left(\frac{A_1^{Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}} - p_{2,1}B_1^{Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}}}{p_{1,1}}\right)^2 + \frac{1}{4B_2}\left(B_1^{Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}}\right)^2\right.$$
$$\left.+ C_0^{Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}} + (2M + \Delta|p_{2,1}|)\left(\frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})} + D_{2k}\right) + B_2p_{2,1}^2\left(\frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})} + D_{2k}\right)^2\right)$$

Notons que :

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon_1\left(Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}\right)}{\epsilon_2\left(Y_{(2k-1)\tau:2k\tau}\right)} &= \exp\Bigg(-2\left(2M+\Delta|p_{2,1}|\right)\left(\frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})}+D_{2k}\right)\\ &\quad -2B_2p_{2,1}^2\left(\frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})}+D_{2k}\right)^2\Bigg)\\ &= \left(\epsilon'_{2k}\right)^2\end{aligned}$$

Et que, pour tous $z_{2k}^{(1)}\in C_{2k-1}(\Delta)$ et $z_{2k}^{(2)}\in C_{2k}(\Delta)$,

$$\xi_1(D_{2k},\Delta)\leq Q\left(z_{2k}^{(1)},z_{2k}^{(2)}\right)\leq \xi_2(D_{2k},\Delta) \tag{3.29}$$

En appliquant (3.27) , (3.28)et (3.29) pour (3.25) , nous obtenons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\varphi(U_{2k+1})|U_{2k-1}=(z_{2k-2}^{(2)},z_{2k}^{(1)}))&\geq e^{-\tau M(M+2)}\epsilon_{2k-1}^4\left(\epsilon_{2k}\epsilon'_{2k}\right)^2\\ \times\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(z_{2k}^{(2)},z_{2k+2}^{(1)})&\frac{\widetilde{R}^{\Delta}_{2n:2k+2}((z_{2k}^{(1)},z_{2k}^{(2)}),\mathbb{R}^2)\mathbb{1}_{C_{2k}(\Delta)}(z_{2k}^{(2)})\psi_{2k}^{(2)}(z_{2k}^{(2)})}{\int_{\mathbb{R}}\widetilde{R}_{2n:2k}((z_{2k}^{(1)},z'),\mathbb{R}^2)\mathbb{1}_{C_{2k}(\Delta)}(z')\psi_{2k}^{(2)}(z')dz'}\\ &\times\left(\int_{\mathbb{R}}S^{\Delta}_{2n|2k}((z_{2k}^{(1)},z_{2k}^{(2)}),(z_{2k+2}^{(1)},z_{2k+2}^{(2)})dz_{2k+2}^{(2)}\right)dz_{2k}^{(2)}dz_{2k+2}^{(1)}\end{aligned}$$

$\widetilde{R}^{\Delta}_{2n:2k+2}((z_{2k}^{(1)},z_{2k}^{(2)}),\mathbb{R}^2)$ et $S^{\Delta}_{2n|2k}(z_{2k}^{(1)},z_{2k}^{(2)},.)$ ne dépendant pas de $z_{2k}^{(1)}$. Nous obtenons que $S^U_{2n|2k+1}$ est mélangeant avec le coefficient de mélange qui est $e^{-\tau M(M+2)}\epsilon_{2k-1}^4\left(\epsilon_{2k}\epsilon'_{2k}\right)^2$. De la même manière, nous obtenons que $S^{(p)U}_{2n|2k+1}$ est mélangeant avec le coefficient de mélange qui est $\epsilon_{2k-1}^4(\epsilon_{2k})^2$. Car $\epsilon_{2k-1}^4(\epsilon_{2k})^2\geq e^{-\tau M(M+2)}\epsilon_{2k-1}^4\left(\epsilon_{2k}\epsilon'_{2k}\right)^2$, donc, on peut dire que le coefficient de mélange de $S^{(p)U}_{2n|2k+1}$ est aussi $e^{-\tau M(M+2)}\epsilon_{2k-1}^4\left(\epsilon_{2k}\epsilon'_{2k}\right)^2$. □

3.2.3. Représentation du filtre robuste par rapport aux chaînes construites.

PROPOSITION 3.7. *Soit $n\geq 1$. Pour toute mesure μ sur $\mathbb{R}$. Si nous supposons que Z_0 a de loi $\psi^{\Delta}_{2n|0}\bullet\bar{\mu}$, où $\bar{\mu}(dx,dx')=\delta_0(dx)\mu(dx')$. Alors, pour toute fonction test φ(dans $\mathcal{C}_b^+(\mathbb{R})$),*

$$\frac{\mathbb{E}(\varphi(U_{2n+1}^{(1)})\prod_{1\leq i\leq n}\psi^{\Delta}_{2i-1}(U_{2i-1}))}{\mathbb{E}(\prod_{1\leq i\leq n}\psi^{\Delta}_{2i-1}(U_{2i-1}))}=\left(\overline{R}^{\Delta}_{2n}\circ\overline{R}^{\Delta}_{2n-1}\circ\cdots\circ\overline{R}^{\Delta}_{1}(\mu)\right)(\varphi) \tag{3.30}$$

Si nous supposons que Z_0 a de loi $\psi^{\Delta,(p)}_{2n|0}\bullet\bar{\mu}$, où $\bar{\mu}(dx,dx')=\delta_0(dx)\mu(dx')$. Alors, pour toute fonction test φ(dans $\mathcal{C}_b^+(\mathbb{R})$),

$$\frac{\mathbb{E}(\varphi(U_{2n-1}^{(p)(2)})\prod_{1\leq i\leq n}\psi^{\Delta}_{2i-1}(U^{(p)}_{2i-1}))}{\mathbb{E}(\prod_{1\leq i\leq n}\psi^{\Delta}_{2i-1}(U^{(p)}_{2i-1}))}=\left(\overline{R}^{\Delta}_{2n-1}\circ\overline{R}^{\Delta}_{2n-2}\circ\cdots\circ\overline{R}^{\Delta}_{1}(\mu)\right)(\varphi) \tag{3.31}$$

REMARQUE 3.8. Notons que dans notre cadre de travail, nous fixons l'observation $(Y_s)_{s\geq 0}=(y_s)_{s\geq 0}$. La proposition au-dessus nous montre que, avec pour tout n, $\overline{R}^{\Delta}_{n}\circ\overline{R}^{\Delta}_{n-1}\circ\cdots\circ\overline{R}^{\Delta}_{1}(\mu)$ peut s'exprimer comme le $n-ième$ terme d'une suite de Feynman-Kac qui est basée sur les noyaux de transition mélangeants (par la proposition 3.4). Nous pouvons donc appliquer la proposition 1.1 pour cette suite. Cette représentation reste toujours vraie pour la mesure $\overline{R}^{\Delta}_{n}\circ\overline{R}^{\Delta}_{n-1}\circ\cdots\circ\overline{R}^{\Delta}_{k}(\eta)$, pour tout $k\leq n$, et η est une mesure de probabilité sur $\mathbb{R}$.

DÉMONSTRATION. Nous allons montrer (3.30) et nous faisons similairement pour (3.31). Pour toute fonction test φ(dans $\mathcal{C}_b^+(\mathbb{R})$), nous avons :

$$\mathbb{E}\left(\varphi\left(U_{2n+1}^{(1)}\right)\prod_{i=1}^{n}\psi^{\triangle}_{2i-1}\left(U_{2i-1}\right)\right)= \tag{3.32}$$

$$= \int_{(\mathbb{R}^2)^{n+1}} \varphi\left(z_{2n}^{(2)}\right) \prod_{k=0}^{n-1} \psi_{2k+1}^{\triangle}\left(z_{2k}^{(2)}, z_{2k+2}^{(1)}\right) S_{2n|2k}^{\triangle}\left(z_{2k}, z_{2k+2}\right) \psi_{2n|0}^{\triangle} \bullet \bar{\mu}\left(dz_0\right) dz_2 \dots dz_{2n}$$

$$= \int_{(\mathbb{R}^2)^{n+1}} \varphi(z_{2n}^{(2)}) \prod_{k=0}^{n-1} \left[\frac{\psi_{2n|2k+2}^{\Delta}(z_{2k+2})}{\psi_{2n|2k}^{\Delta}(z_{2k})} \widetilde{R}_{2k+2}^{\Delta}(z_{2k}, dz_{2k+2}) \psi_{2k+1}^{\Delta}(z_{2k}^{(2)}, z_{2k+2}^{(1)}) \right] (\psi_{2n|0}^{\Delta} \bullet \bar{\mu})(dz_0)$$

$$= \int_{\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}} \varphi(z_{2n}^{(2)}) \prod_{k=0}^{n-1} \left[\widetilde{R}_{2k+2}^{\Delta}(z_{2k}, dz_{2k+2}) \psi_{2k+1}^{\Delta}(z_{2k}^{(2)}, z_{2k+2}^{(1)}) \right] \frac{\mu(dz_0^{(2)})}{\bar{\mu}(\psi_{2n|0}^{\Delta})}$$

Par définition, nous avons :

$$(3.33) \quad \left(R_{2n}^{\Delta} \circ R_{2n-1}^{\Delta} \circ \cdots \circ R_1^{\Delta}(\mu)\right)(\varphi)$$

$$\overset{proportionnel}{\propto} \int_{\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}} \varphi(z_{2n}^{(2)}) \prod_{k=0}^{n-1} \left[R_{2k+2}^{\Delta}(z_{2k+2}^{(1)}, dz_{2k+2}^{(2)}) R_{2k+1}^{\Delta}(z_{2k}^{(2)}, dz_{2k+2}^{(1)}) \right] \mu(dz_0^{(2)})$$

D'autre part, par définition,

$$\widetilde{R}_{2k+2}^{\Delta}(z_{2k}, dz_{2k+2}) = \mathbb{1}_{C_{2k}(\Delta)}(z_{2k}^{(2)}) \mathbb{1}_{C_{2k+1}(\Delta)}(z_{2k+2}^{(1)}) \psi_{2k+2}^{\Delta}(z_{2k+2}^{(1)}, z_{2k+2}^{(2)}) Q(z_{2k}^{(2)}, dz_{2k+2}^{(1)}) Q(z_{2k+2}^{(1)}, dz_{2k+2}^{(2)})$$
$$+ \mathbb{1}_{C_{2k}^c(\Delta)}(z_{2k}^{(2)}) \mathbb{1}_{C_{2k+1}(\Delta)}(z_{2k+2}^{(1)}) \psi_{2k+2}^{\Delta}(z_{2k+2}^{(1)}, z_{2k+2}^{(2)}) \xi_1(D_{2k+1}, \Delta) Q(z_{2k+2}^{(1)}, dz_{2k+2}^{(2)})$$

Et,

$$R_{k+1}^{\Delta}(x, dx') = \mathbb{1}_{C_k(\Delta)}(x) \psi_{k+1}^{\Delta}(x, x') Q(x, dx') + \mathbb{1}_{C_k^c(\Delta)}(x) \psi_{k+1}^{\Delta}(x, x') \xi_1(D_{k+1}, \Delta) dx'$$

Donc,

$$(3.34) \qquad \widetilde{R}_{2k+2}^{\Delta}(z_{2k}, dz_{2k+2}) \psi_{2k+1}^{\Delta}(z_{2k}^{(2)}, z_{2k+2}^{(1)}) = R_{2k+2}^{\Delta}(z_{2k+2}^{(1)}, dz_{2k+2}^{(2)}) R_{2k+1}^{\Delta}(z_{2k}^{(2)}, dz_{2k+2}^{(1)})$$

Cette proposition est donc bien obtenue grâce à (3.32), (3.33) et (3.34). □

3.3. La stabilité du filtre robuste

La proposition 3.7 nous indique que le filtre robuste peut s'exprimer sous la forme d'une suite de Feynman-Kac basée sur une chaîne de Markov avec un noyau de transition mélangeant. Donc, nous pouvons appliquer la proposition 1.2 pour cette suite pour obtenir la stabilité. Dans cette subsection, nous allons utiliser l'idée dans [**OR05**] pour montrer la stabilité. On suppose que $\left(\pi_{n\tau}^{\triangle}\right)_{n>0}, \left((\pi')_{n\tau}^{\triangle}\right)_{n>0}$ sont des filtres robustes avec les condictions initiales π_0, π_0' respectivement. Nous nous intéressons à l'espérance $\mathbb{E}\left(\left\|\pi_{n\tau}^{\triangle} - (\pi')_{n\tau}^{\triangle}\right\|_{VT}\right)$. Pour tous t dans $\mathbb{R}$ et $k \geq 1$, notons :

$$c_0 = e^{-\tau M(M+2)}$$

$$\tau(t, \Delta) = 1 - c_0 (\epsilon(t, \Delta)^3 \epsilon'(t, \Delta))^2 ,$$

$$\tau_k = 1 - c_0 \left(\epsilon_{k-1}^2 \epsilon_k \epsilon_k'\right)^2$$

Pour tout $L > 0$, on pose :

$$\widetilde{\alpha}(L) = \frac{48Ch\sqrt{\tau}}{L\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{L}{6Ch\sqrt{2\tau}}\right)^2\right) .$$

On fixe L tel que

$$(3.35) \qquad L \geq 3m_0 + 3CM\tau \text{ et } \widetilde{\alpha}(L) \leq \frac{1}{4} .$$

Posons:

$$\rho = \frac{\tau(L, \Delta) + \sqrt{\tau(L, \Delta)^2 + 4\widetilde{\alpha}(L)(1 - \tau(L, \Delta))}}{2} .$$

LEMME 3.9. *Pour tout $0 \leq k \leq n$, nous avons :*

$$\mathbb{E}\left(\tau_{2n}\tau_{2n-2}\dots\tau_{2k+2}|Y_{0:2k\tau}\right) \leq \left(1 - \frac{c_0(\epsilon(L,\Delta)^3\epsilon'(L,\Delta)^2)}{2}\right)^{n-k-1}$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $k \geq 1$ et pour $L > 0$ fixé, notons :

$$\theta_{2k} = \begin{cases} \tau(L,\Delta) & \text{si } |m_{2k-2} - m_{2k-1}| < L \text{ et } |m_{2k-1} - m_{2k}| < L \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que pour tout $k \geq 1$, $|m_k - m_{k-1}|$ est une fonction de $Y_{(k-2)_+\tau:k\tau}$ et $\tau_{2k} \leq \theta_{2k} \leq 1$. Introduisons cette nouvelle notation :

$$e_{2n|2k+2} = \begin{cases} \mathbb{E}\left(\theta_{2n}\theta_{2n-2}\dots\theta_{2k+2}|Y_{0:2k\tau}\right) & \text{si } k \leq n-1\,, \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

Donc, nous avons :

$$\mathbb{E}\left(\tau_{2n}\tau_{2n-2}\dots\tau_{2k+2}|Y_{0:2k\tau}\right) \leq e_{2n|2k+2}$$

C'est pourquoi, pour montrer ce lemme, nous allons majorer $e_{2n|2k+2}$. Pout tout $0 \leq k \leq n-2$, nous avons :

$$e_{2n|2k+2} = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(\theta_{2n}\theta_{2n-2} \mid Y_{0:(2n-4)\tau}\right)\theta_{2n-4}\dots\theta_{2k+2} \mid Y_{0:2k\tau}\right)$$

Et,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\theta_{2n}\theta_{2n-2}|Y_{0:(2n-4)\tau}) \\
&= \mathbb{E}(\theta_{2n-2}(1 - \mathbb{1}_{[0,L)}(D_{2n})\mathbb{1}_{[0,L)}(D_{2n-1})) + \tau(L,\Delta)\theta_{2n-2}\mathbb{1}_{[0,L)}(D_{2n})\mathbb{1}_{[0,L)}(D_{2n-1})|Y_{0:(2n-4)\tau}) \\
&\quad = \mathbb{E}(\theta_{2n-2}\tau(L,\Delta) + (1-\tau(L,\Delta))\theta_{2n-2}(1 - \mathbb{1}_{[0,L)}(D_{2n})\mathbb{1}_{[0,L)}(D_{2n-1}))|Y_{0:(2n-4)\tau}) \\
&\quad \leq \tau(L,\Delta)\mathbb{E}(\theta_{2n-2}|Y_{0:(2n-4)\tau}) + (1-\tau(L,\Delta))[\mathbb{P}(|m_{2n} - m_{2n-1}| \geq L|Y_{0:(2n-4)\tau}) + \\
&\qquad\qquad + \mathbb{P}(|m_{2n-1} - m_{2n-2}| \geq L|Y_{0:(2n-4)\tau})]\,.
\end{aligned}$$

D'autre part, pour tout $k \geq 1$, pour tout L satisfaisant (3.35), pour tout x, pour tout $p < k-2$, nous avons :

$$\mathbb{P}(\mathcal{V}_{(k-2)_+\tau,k\tau} \geq x) \leq \mathbb{P}(2|W_{2\tau}| \geq x)\,,$$
$$\mathbb{P}(\mathcal{W}_{(k-2)_+\tau,k\tau} \geq x) \leq \mathbb{P}(2|W_{2\tau}| \geq x)\,.$$

En utilisant (3.7) et les inégalités au-dessus, nous déduisons:

$$\mathbb{P}(|m_k - m_{k-1}| \geq L|Y_{0:p\tau})) \leq 2\mathbb{P}\left(Ch \times 2|W_{2\tau}| \geq \frac{L}{3}\right) = 2\mathbb{P}\left(|W_1| \geq \frac{L}{6Ch\sqrt{2\tau}}\right)$$

En utilisant l'inégalité suivante pour $\mathbb{P}\left(|W_1| \geq \frac{L}{6Ch\sqrt{2\tau}}\right)$,

$$z > 0\,, \int_z^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)dt \leq \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)}{z}\,,$$

Nous obtenons :

$$\mathbb{P}(|m_k - m_{k-1}| \geq L|Y_{0:p\tau})) \leq \frac{24Ch\sqrt{\tau}}{L\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{L}{6C\sqrt{2\tau}}\right)^2\right).$$

Donc,

$$\mathbb{E}(\theta_{2n}\theta_{2n-2}|Y_{0:(2n-4)\tau}) \leq \tau(L,\Delta)\mathbb{E}(\theta_{2n-2}|Y_{0:(2n-4)\tau}) + (1-\tau(L,\Delta))\widetilde{\alpha}(L)\,.$$

Par conséquent, pour tout n, nous pouvons majorer :

$$e_{2n|2k+2} \leq \tau(L,\Delta)e_{2n-2|2k+2} + (1-\tau(L,\Delta))\widetilde{\alpha}(L)e_{2n-4|2k+2}$$

En particulier, parce que : $e_{2k|2k+2} = 1$, $e_{2k+2|2k+2} \leq 1$ et $1 > \rho = \tau(L,\Delta) + \frac{1}{\rho}(1-\tau(L,\Delta))\widetilde{\alpha}(L) \geq \tau(L,\Delta) + (1-\tau(L,\Delta))\widetilde{\alpha}(L)$, nous avons :

$$e_{2k+4|2k+2} \leq \tau(L,\Delta) + (1-\tau(L,\Delta))\widetilde{\alpha}(L) \leq \rho$$

Par récurrence, pout tout $0 \leq k \leq n-2$, (en remarquant que ρ est une solution d'une équation de dégrés deux définie par : $x^2 - \tau(L,\Delta)x - (1-\tau(L,\Delta))\widetilde{\alpha}(L) = 0$), nous obtenons :

$$e_{2n|2k+2} \leq \rho^{n-k-1}$$

Parce que $\widetilde{\alpha}(L) \leq \dfrac{1}{4}$, nous avons :

$$\rho \leq \frac{1}{2}(\tau(L,\Delta) + \sqrt{\tau(L,\Delta)^2 + 1 - \tau(L,\Delta)} \leq \frac{\tau(L,\Delta)+1}{2} = 1 - c_0\frac{(\epsilon(L,\Delta)^3\epsilon'(L,\Delta))^2}{2}$$

Donc, ce lemme est bien montré. □

REMARQUE 3.10. Similairement, on peut montrer que :

$$\mathbb{E}\left(\tau_n\tau_{n-2}\dots\tau_{k+2}|Y_{0:k\tau}\right) \leq \left(1 - \frac{c_0(\epsilon(L,\Delta)^3\epsilon'(L,\Delta)^2)}{2}\right)^{\left(\lfloor\frac{n-k}{2}\rfloor - 1\right)_+}$$

Grâce à ce lemme, nous obtenons le résultat suivant.

PROPOSITION 3.11. *Pour tout n, nous avons :*

$$\mathbb{E}\left(\left\|\pi^{\triangle}_{n\tau} - \pi'^{\triangle}_{n\tau}\right\|_{VT}\right) \leq 2\left(1 - c_0\frac{(\epsilon(L,\Delta)^3\epsilon'(L,\Delta))^2}{2}\right)^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor_+}$$

DÉMONSTRATION. En appliquant la proposition 1.1 et la proposition 3.7, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, nous obtenons :

$$\left\|\pi^{\triangle}_{2p\tau} - \pi'^{\triangle}_{2p\tau}\right\|_{VT} \leq 2\tau_{2p}\tau_{2(p-1)}\dots\tau_2$$

et

$$\left\|\pi^{\triangle}_{(2p-1)\tau} - \pi'^{\triangle}_{(2p-1)\tau}\right\|_{VT} \leq 2\tau_{2(p-1)}\tau_{2(p-2)}\dots\tau_2$$

Grâce au lemme 3.9,

$$\mathbb{E}\left(\left\|\pi^{\triangle}_{2p\tau} - \pi'^{\triangle}_{2p\tau}\right\|_{VT}\right) \leq 2\left(1 - c_0\frac{(\epsilon(L,\Delta)^3\epsilon'(L,\Delta))^2}{2}\right)^{p-1}$$

Et,

$$\mathbb{E}\left(\left\|\pi^{\triangle}_{(2p-1)\tau} - \pi'^{\triangle}_{(2p-1)\tau}\right\|_{VT}\right) \leq 2\left(1 - c_0\frac{(\epsilon(L,\Delta)^3\epsilon'(L,\Delta))^2}{2}\right)^{p-2}$$

Donc, pour tout n, nous avons :

$$\mathbb{E}\left(\left\|\pi^{\triangle}_{n\tau} - \pi'^{\triangle}_{n\tau}\right\|_{VT}\right) \leq 2\left(1 - c_0\frac{(\epsilon(L,\Delta)^3\epsilon'(L,\Delta))^2}{2}\right)^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor_+}$$

□

CHAPITRE 4

Stabilité du filtre optimal

Tout au long de ce chapitre, nous supposons que les paramètres τ, h, Δ satisfont l'hypothèse 2 et l'hypothèse 3.

4.1. Estimation des erreurs

Au chapitre 3, nous avons construit un filtre robuste qui est stable. Dans cette section, nous allons montrer que le filtre optimal peut être approximé uniformément en temps par ce filtre robuste. Nous nous intéressons à la différence entre $\pi_{n\tau}$ et $\pi_{n\tau}^{\Delta}$ par rapport à la norme variation totale. Cette différence est appelée l'erreur globale. Notons que cette erreur peut être majorée comme sui :

$$\|\pi_{n\tau} - \pi_{n\tau}^{\Delta}\|_{VT} \leq \|\pi_{n\tau} - \overline{R}_n^{\Delta}(\pi_{(n-1)\tau})\|_{VT} + \sum_{1 \leq k \leq n-1} \|\overline{R}_{n:k+1}^{\Delta}(\pi_{k\tau}) - \overline{R}_{n:k+1}^{\Delta}(\overline{R}_k^{\Delta}(\pi_{(k-1)\tau}))\|_{VT}$$

L'inégalité ci-dessus nous suggère à considérer tout d'abord la différence entre $\pi_{k\tau}$ et $\overline{R}_k^{\Delta}(\pi_{(k-1)\tau})$, appelée l'erreur locale.

4.1.1. L'erreur locale.

Rappelons que " $\preceq$ " est définie dans la définition 2.6 et la fonction $T(\Delta)$ est définie dans la formule (3.9). Rappelons qu'à partir du lemme 2.10, sous la mesure de Wiener λ_τ, nous savons que $A_1^{Y_{0:\tau}}$ et $B_1^{Y_{0:\tau}}$ sont des variables gaussiennes, notons $\bar{\Psi}(.,.)$ est la fonction densité du vecteur $\left(A_1^{Y_{0:\tau}}, B_1^{Y_{0:\tau}}\right)$. Définissons la fonction Ψ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$\Psi(t_1, t_2) = \mathbb{E}\left(\exp\left(C_0^{W_{0:\tau}}\right) | A_1^{W_{0:\tau}} = t_1, B_1^{W_{0:\tau}} = t_2\right) \bar{\Psi}(t_1, t_2) \tag{4.1}$$

Notons Ψ_1 une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :

$$\Psi(t_1, t_2) = \exp\left(-\frac{1}{4}(t_1, t_2)\,\kappa^{-1}(t_1, t_2)^T\right) \Psi_1(t_1, t_2) \tag{4.2}$$

On rappelle ici la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ qui est définie dans (2.1). Pour toute fonction test φ dans $\mathcal{C}_b^+(\mathbb{R}^2)$ (l'ensemble des fonctions continues, bornées sur $\mathbb{R}^2$), nous avons :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\varphi\left(A_1^{Y_{0:\tau}}, B_1^{Y_{0:\tau}}\right) | X_0 = x, X_\tau = z\right) = \frac{\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\varphi\left(A_1^{Y_{0:\tau}}, B_1^{Y_{0:\tau}}\right) \left.\frac{d\mathbb{P}}{d\widetilde{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_\tau} | X_0 = x, X_\tau = z\right)}{\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\left.\frac{d\mathbb{P}}{d\widetilde{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_\tau} | X_0 = x, X_\tau = z\right)} \tag{4.3}$$

Et, conditionné sur $X_0 = x$ et $X_\tau = z$, nous avons l'encadrement suivant (la démonstration simple se trouve dans la proposition 2.1) :

$$\exp\left(-M|x-z| - \frac{\tau M(M+1)}{2}\right) \leq \left.\frac{d\mathbb{P}}{d\widetilde{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_\tau} \leq \exp\left(M|x-z| + \frac{\tau M}{2}\right) \tag{4.4}$$

Sous la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$. Nous savons que X est un mouvement brownien, donc $X_{0:\tau}$ conditioné par $X_0 = x, X_\tau = z$ est le pont brownien. Le lemme suivant nous donne des propriétés de $A_1^{Y_{0:\tau}}, B_1^{Y_{0:\tau}}$ sous la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$.

LEMME 4.1. *Sous la probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$, conditionné par $X_0 = x$ et $X_\tau = z$, nous savons que $A_1^{Y_{0:\tau}}$ et $B_1^{Y_{0:\tau}}$ sont deux variables gausiennes. D'ailleur, la matrice de covariance du vecteur $\left(A_1^{Y_{0:\tau}}, B_1^{Y_{0:\tau}}\right)$ ne dépend pas de x et z.*

DÉMONSTRATION. En utilisant le pont brownien, nous avons :

$$\mathcal{L}\left((X_s)_{s\in[0,\tau]} \mid X_0 = x, X_\tau = z\right) = \mathcal{L}\left(x\left(1-\frac{s}{\tau}\right) + z\frac{s}{\tau} + B_s - \frac{s}{\tau}B_\tau, s\in[0,\tau]\right)$$

Où $(B_s)_{s\in[0,\tau]}$ est un mouvement brownien sous la probabilité $\mathbb{P}$ qui est indépendant de $(W_s)_{s\in[0,\tau]}$. A partir du lemme 2.10, conditionné par $X_0 = x$ et $X_\tau = z$, nous avons :

$$\begin{aligned}
A_1^{Y_{0:\tau}} &= \int_0^\tau f_1\left(\frac{s}{\tau}\right) dY_s = h\int_0^\tau f_1\left(\frac{s}{\tau}\right) X_s ds + \int_0^\tau f_1\left(\frac{s}{\tau}\right) dW_s \\
&= h\int_0^\tau f_1\left(\frac{s}{\tau}\right)\left(x\left(1-\frac{s}{\tau}\right) + z\frac{s}{\tau}\right) ds + h\int_0^\tau f_1\left(\frac{s}{\tau}\right)\left(B_s - \frac{s}{\tau}B_\tau\right) ds + \int_0^\tau f_1\left(\frac{s}{\tau}\right) dW_s \\
&= h\tau\int_0^1 f_1(s)\left(x(1-s) + zs\right) ds + h\sqrt{\tau}\int_0^1 f_1(s)\left(B_s - sB_1\right) ds + \sqrt{\tau}\int_0^1 f_1(s)\, dW_s \\
&\text{(intégrale par partie)} \\
&= h\tau\int_0^1 f_1(s)\left(x(1-s) + zs\right) ds + h\sqrt{\tau}\int_0^1 \left(\int_0^1 (1-s) f_1(s)\, ds - \int_0^s f_1(u)\, du\right) dB_s \\
&+ \sqrt{\tau}\int_0^1 f_1(s)\, dW_s
\end{aligned}$$

Similairement, nous obtenons la forme pour $B_1^{Y_{0:\tau}}$, conditionné par $X_0 = x$ et $X_\tau = z$

$$\begin{aligned}
B_1^{Y_{0:\tau}} &= h\tau\int_0^1 f_2(s)\left(x(1-s) + zs\right) ds + h\sqrt{\tau}\int_0^1 \left(\int_0^1 (1-s) f_2(s)\, ds - \int_0^s f_2(u)\, du\right) dB_s \\
&+ \sqrt{\tau}\int_0^1 f_2(s)\, dW_s
\end{aligned}$$

Donc, $A_1^{Y_{0:\tau}}$ et $B_1^{Y_{0:\tau}}$ sont deux variables gausiennes et la matrice de covariance du vecteur $\left(A_1^{Y_{0:\tau}}, B_1^{Y_{0:\tau}}\right)$ ne dépend pas de x et z. □

Nous allons ensuite donner un encadrement pour Ψ_1 qui est définie dans la formule (4.2) en utilisant les faits ci-dessus :

LEMME 4.2. *Il existe une constante positive $C_1(h,\tau)$ telle que, p.s. par rapport à (x,z) dans $\mathbb{R}^2$,*

$$\Psi_1(2(x,z)\kappa) \leq C_1(h,\tau)\exp\left(4M|x-z| + \tau M(M+2)\right)$$

Et,

$$\Psi_1(2(x,z)\kappa) \geq \left(C_1(h,\tau)\right)^{-1}\exp\left(-4M|x-z| - \tau M(M+2)\right)$$

DÉMONSTRATION. Fixons (x,z) dans $\mathbb{R}^2$. Pour toute fonction test φ dans $\mathcal{C}_b^+(\mathbb{R}^2)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
(4.5)\quad \int_{\mathcal{C}([0,\tau])} &\varphi(A_1^{y_{0:\tau}}, B_1^{y_{0:\tau}})\widehat{\psi}(y_{0:\tau}, x, z)\lambda_\tau(dy_{0:\tau}) = \mathbb{E}\left(\varphi(A_1^{W_{0:\tau}}, B_1^{W_{0:\tau}})\widehat{\psi}(W_{0:\tau}, x, z)\right) \\
&= \mathbb{E}\Bigg(\varphi(A_1^{W_{0:\tau}}, B_1^{W_{0:\tau}})\exp\left(-A_2x^2 - B_2z^2 + C_1xz + A_1^{W_{0:\tau}}x + B_1^{W_{0:\tau}}z\right) \\
&\qquad \times \mathbb{E}\left(\exp\left(C_0^{W_{0:\tau}}\right) | A_1^{W_{0:\tau}}, B_1^{W_{0:\tau}}\right)\Bigg) \\
&= \sigma_1\sigma_2\int_{\mathbb{R}^2}\varphi(t_1,t_2)\exp\left(-A_2x^2 - B_2z^2 + C_1xz + t_1x + t_2z\right)\Psi(t_1,t_2)dt_1dt_2\,,
\end{aligned}$$

Pour toute fonction φ dans $\mathcal{C}_b^+(\mathbb{R}^2)$, on utilise la proposition 2.12 et la formule (4.5) pour obtenir :

$$(4.6)\quad \int_{\mathcal{C}([0,\tau])}\varphi(A_1^{y_{0:\tau}}, B_1^{y_{0:\tau}})\psi(y_{0:\tau}, x, z)\lambda_\tau(dy_{0:\tau})$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \int_{\mathcal{C}([0,\tau])} \varphi(A_1^{y_{0:\tau}}, B_1^{y_{0:\tau}}) e^{2M|x-z|+\tau M\left(\frac{M}{2}+1\right)} \widehat{\psi}(y_{0:\tau}, x, z) \hat{\lambda}_\tau(dy_{0:\tau}) \\
&= \sigma_1\sigma_2 e^{2M|x-z|+\tau M\left(\frac{M}{2}+1\right)} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(t_1,t_2) e^{-A_2x^2-B_2z^2+C_1xz+t_1x+t_2x} \Psi(t_1,t_2) dt_1 dt_2 \\
&= \sigma_1\sigma_2 e^{2M|x-z|+\tau M\left(\frac{M}{2}+1\right)} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(t_1,t_2) \exp\left(-\frac{1}{4}((t_1,t_2)-2(x,z)\kappa)\kappa^{-1}((t_1,t_2)^T - 2\kappa(x,z)^T)\right) \\
&\qquad \times \Psi_1(t_1,t_2) dt_1 dt_2
\end{aligned}
$$

Pout tout t_1 et t_2 dans $\mathbb{R}$, notons

$$\mathcal{Q}(t_1,t_2) = \exp\left(-\frac{1}{4}(t_1,t_2)\kappa^{-1}(t_1,t_2)^T\right).$$

D'autre part,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\varphi\left(A_1^{Y_{0:\tau}}, B_1^{Y_{0:\tau}}\right)|X_0 = x, X_\tau = z\right) = \int_{\mathcal{C}([0,\tau])} \varphi(A_1^{y_{0:\tau}}, B_1^{y_{0:\tau}}) \psi(y_{0:\tau}, x, z) \hat{\lambda}_\tau(dy_{0:\tau}) \tag{4.7}$$

Grâce aux (4.3) et (4.4), nous obtenons donc,

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\varphi\left(A_1^{Y_{0:\tau}}, B_1^{Y_{0:\tau}}\right)|X_0 = x, X_\tau = z\right) \\
&\qquad \leq \exp\left(2M|x-z| + \frac{\tau M(M+2)}{2}\right) \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\varphi\left(A_1^{Y_{0:\tau}}, B_1^{Y_{0:\tau}}\right)|X_0 = x, X_\tau = z\right)
\end{aligned} \tag{4.8}
$$

Et

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\varphi\left(A_1^{Y_{0:\tau}}, B_1^{Y_{0:\tau}}\right)|X_0 = x, X_\tau = z\right) \\
&\qquad \geq \exp\left(-2M|x-z| - \frac{\tau M(M+2)}{2}\right) \mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\varphi\left(A_1^{Y_{0:\tau}}, B_1^{Y_{0:\tau}}\right)|X_0 = x, X_\tau = z\right)
\end{aligned} \tag{4.9}
$$

En appliquant le lemme 4.1, nous avons une expression :

$$\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}\left(\varphi\left(A_1^{Y_{0:\tau}}, B_1^{Y_{0:\tau}}\right)|X_0 = x, X_\tau = z\right) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(t_1,t_2)\, \mathcal{Q}'_{x,z}(t_1,t_2) dt_1 dt_2 \tag{4.10}$$

Où $\log \mathcal{Q}'_{x,z}(t_1,t_2)$ est une forme quadratique en t_1 et t_2.
Nous obtenons, à partir de (4.6) $-$ (4.10),*p.s.* en (t_1,t_2) par rapport à une mesure Lebesgue dans $\mathbb{R}^2$,

$$\mathcal{Q}'_{x,z}(t_1,t_2) \leq \sigma_1\sigma_2 e^{4M|x-z|+\tau M(M+2)} \mathcal{Q}((t_1,t_2)-2(x,z)\kappa)\Psi_1(t_1,t_2). \tag{4.11}$$

Et, en utilisant la borne inférieure dans la proposition 2.12 , nous obtenons :

$$\mathcal{Q}'_{x,z}(t_1,t_2) \geq \sigma_1\sigma_2 e^{-4M|x-z|-\tau M(M+2)} \mathcal{Q}((t_1,t_2)-2(x,z)\kappa)\Psi_1(t_1,t_2). \tag{4.12}$$

Notons M^c et $m = (m_1,m_2)$ sont la matrice de covariance(qui ne dépend pas de (x,z)) et le moyen(qui dépend de (x,z)) de $\left(A_1^{Y_{0:\tau}}, B_1^{Y_{0:\tau}}\right)$, respectivement. Pour tous x, z, t_1 et t_2 dans $\mathbb{R}$, nous avons :

$$\max_{t_1,t_2} \mathcal{Q}'_{x,z}(t_1,t_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{det\,(M^c)}}$$

Et

$$\mathcal{Q}'_{x,z}(m_1,m_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{det\,(M^c)}}$$

Donc, à partir de (4.12), on gagne l'existence d'une constante positive qui dépend de τ et h, notée $C_1(h,\tau)$ telle que :

$$\Psi_1(2(x,z)\kappa) \leq C_1(\tau,h) e^{4M|x-z|+\tau M(M+2)}$$

Par ailleur, nous voyons dans la démonstration du lemme 4.1 que le vecteur de moyen $m = (m_1,m_2)$ peut s'exprimer sous forme $m = (x,z)\,\kappa'$, où κ' est une matrice fixée dans $\mathcal{M}_{2,2}(\mathbb{R})$. Donc, à partir de (4.11), avec pour tous x et z dans $\mathbb{R}$, nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}((x,z)\,\kappa' - 2(x,z)\kappa) &\geq \mathcal{Q}'_{x,z}((x,z)\,\kappa')\,(\sigma_1\sigma_2)^{-1}\,e^{-4M|x-z|-\tau M(M+2)}\,(\Psi_1((x,z)\,\kappa'))^{-1}\\ &\geq \frac{1}{2\pi\sqrt{det\,(M^c)}}\,(\sigma_1\sigma_2)^{-1}\,C_1(\tau,h)^{-1}e^{-4M|x-z|-2\tau M(M+2)-4M|\frac{1}{2}(x,z)\kappa'\kappa^{-1}(1,-1)^T|}\end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}((x,z)\,\kappa' - 2(x,z)\kappa)&e^{4M|x-z|+4M|\frac{1}{2}(x,z)\kappa'\kappa^{-1}(1,-1)^T|}\\ &\geq \frac{1}{2\pi\sqrt{det\,(M^c)}}\,(\sigma_1\sigma_2)^{-1}\,C_1(\tau,h)^{-1}e^{-2\tau M(M+2)}\end{aligned} \tag{4.13}$$

Si $\kappa' \neq 2\kappa$, nous avons :

$$\lim_{(x,z)\to(\infty,\infty)} \mathcal{Q}((x,z)\,\kappa' - 2(x,z)\kappa)e^{4M|x-z|+4M|\frac{1}{2}(x,z)\kappa'\kappa^{-1}(1,-1)^T|} = 0$$

Ce qui est contradictoire avec l'inégalité (4.13), donc $\kappa' = 2\kappa$. Dans (4.11), en remplaçant (t_1, t_2) par $(2(x,z)\kappa)$, nous obtenons :

$$\Psi_1(2(x,z)\kappa) \geq (C_1(h,\tau))^{-1}\exp\left(-4M|x-z| - \tau M\,(M+2)\right)$$

□

Lemme 4.3. *Si nous avons un ensemble $\mathcal{A} = \{y_{0:\tau} \in \mathcal{C}([0;\tau]) : (A_1^{y_{0:\tau}}, B_1^{y_{0:\tau}}) \in \mathcal{B}\}$, où $\mathcal{B}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$. Alors,*

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{A}} \widehat{\psi}(y_{0:\tau},x,z)\hat{\lambda}_\tau(dy_{0:\tau}) &\leq \sigma_1\sigma_2 C_1(h,\tau)\\ &\times \int_{(t_2,t_2)\in\mathcal{B}} \exp\left\{-\frac{A_2^{-1}}{4}\left(\left|\frac{t_1}{p_{1,1}} - \frac{p_{2,1}t_2}{p_{1,1}} - 2A_2p_{1,1}x\right| - 4M\left|\frac{1}{p_{1,1}} + \frac{p_{2,1}}{p_{1,1}}\right|\right)^2\right.\\ &\qquad\left. - \frac{B_2^{-1}}{4}\left(|t_2 - 2B_2(p_{2,1}x+z)| - 4M\right)^2\right\}\\ &\qquad \times \exp\left(4\left|M^2(1,-1)\kappa^{-1}(1,-1)^T\right| + \tau M\,(M+2) + 4M|x-z|\right)dt_1dt_2\end{aligned}$$

Et,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{A}} \widehat{\psi}(y_{0:\tau},x,z)\hat{\lambda}_\tau(dy_{0:\tau}) &\geq (\sigma_1\sigma_2)\,C_1(h,\tau)^{-1}\\ &\times \int_{(t_2,t_2)\in\mathcal{B}} \exp\left\{-\frac{A_2^{-1}}{4}\left(\left|\frac{t_1}{p_{1,1}} - \frac{p_{2,1}t_2}{p_{1,1}} - 2A_2p_{1,1}x\right| + 4M\left|\frac{1}{p_{1,1}} + \frac{p_{2,1}}{p_{1,1}}\right|\right)^2\right.\\ &\qquad\left. - \frac{B_2^{-1}}{4}\left(|t_2 - 2B_2(p_{2,1}x+z)| + 4M\right)^2\right\}\\ &\qquad \times \exp\left(-4\left|M^2(1,-1)\kappa^{-1}(1,-1)^T\right| - \tau M\,(M+2) - 4M|x-z|\right)dt_1dt_2\end{aligned}$$

Démonstration. Nous donnons ici l'inégalité pour la majoration et faisons de même pour la minoration. Grâce à l'équation (4.5), nous avons :

$$\begin{aligned}&\int_{\mathcal{A}} \widehat{\psi}(y_{0:\tau},x,z)\hat{\lambda}_\tau(dy_{0:\tau})\\ &= \sigma_1\sigma_2\int_{\mathcal{B}} \exp\left(-(x,z)\kappa(x,z)^T + t_1x + t_2z\right)\exp\left(-\frac{1}{4}(t_1,t_2)\kappa^{-1}(t_1,t_2)^T\right)\Psi_1(t_1,t_2)dt_1dt_2\\ &= \sigma_1\sigma_2\int_{\mathcal{B}} \exp\left(-\frac{1}{4}[(t_1,t_2) - 2(x,z)\kappa^T]\kappa^{-1}[(t_1,t_2)^T - 2\kappa(x,z)^T]\right)\Psi_1(t_1,t_2)dt_1dt_2\\ &= \sigma_1\sigma_2\int_{\mathcal{B}} \exp\left(-\frac{1}{4}[(t_1,t_2) - 2(x,z)\kappa]\kappa^{-1}[(t_1,t_2) - 2(x,z)\kappa]^T\right)\\ &\qquad \times \Psi_1\left(2(t_1,t_2)\frac{1}{2}\kappa^{-1}\kappa\right)dt_1dt_2\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\text{(Grâce au lemma 4.2)}\\
&\leq \sigma_1\sigma_2 \int_{\mathcal{B}} \exp\left(-\frac{1}{4}[(t_1,t_2)-2(x,z)\kappa]\kappa^{-1}[(t_1,t_2)-2(x,z)\kappa]^T\right)\\
&\qquad \times C_1(h,\tau)\exp\left(2M|(t_1,t_2)\kappa^{-1}(1,-1)^T| + \tau M\,(M+2)\right) dt_1 dt_2\,,
\end{aligned}
$$

Pour tous t_1 et t_2 dans $\mathbb{R}$, pour tout $\delta \in \{-2, 2\}$, nous avons:

$$
\begin{aligned}
&\exp\left(-\frac{1}{4}[(t_1,t_2)-2(x,z)\kappa]\kappa^{-1}[(t_1,t_2)-2(x,z)\kappa]^T + \delta M \times (t_1,t_2)\kappa^{-1}(1,-1)^T\right)\\
&= \exp\left(-\frac{1}{4}[(t_1,t_2)-2(x,z)\kappa - 2\delta M(1,-1)]\kappa^{-1}[(t_1,t_2)-2(x,z)\kappa - 2\delta M(1,-1)]^T\right.\\
&\qquad \left. +4M^2(1,-1)\kappa^{-1}(1,-1)^T + 2\delta M(x,z)(1,-1)^T\right)\\
&= \exp\left(-\frac{1}{4}[(t_1,t_2)P^{-1} - 2(x,z)P^T \begin{bmatrix} A_2 & 0\\ 0 & B_2\end{bmatrix} - 2\delta M(1,-1)P^{-1}]\right.\\
&\times \left. \begin{bmatrix} A_2^{-1} & 0\\ 0 & B_2^{-1}\end{bmatrix} [(t_1,t_2)P^{-1} - 2(x,z)P^T \begin{bmatrix} A_2 & 0\\ 0 & B_2\end{bmatrix} - 2\delta M(1,-1)P^{-1}]^T\right)\\
&\qquad \times \exp(4M^2(1,-1)\kappa^{-1}(1,-1)^T + 2\delta M(x,z)(1,-1)^T).
\end{aligned}
$$

Donc, grâce à cette égalité, nous obtenons le lemme. □

Rappelons $\pi_{k\tau}$ est le filtre optimal bien initialisé avec la vraie condition initiale π_0 et $\pi'_{k\tau}$ est le filtre optimal mal initialisé avec la fausse condition initiale π'_0. Notons que, pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}^+(\mathbb{R})$,

$$\widetilde{Q}\mu(dx, dx') = \mu(dx)Q(x, dx')\,, \forall x, x' \in \mathbb{R}^2$$

Le lemme suivant nous montre que le filtre optimal $\pi_{k\tau}$ est concentré sur les compacts $C_k(\Delta)$.

LEMME 4.4. *Si*

$$\theta^{1-\iota}\Delta > 3m_0 + 3CM\tau\,,\ d(\Delta) > 0\,, \tag{4.14}$$

Alors, pour tout $k \geq 0$, nous avons :

$$\mathbb{E}(\pi_{k\tau}(C_k(\Delta)^{\complement}) \preceq T(\Delta)$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $k \geq 1$, nous avons :

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{1}_{|m_k - m_{k-1}| \leq \Delta\theta^{1-\iota}}\pi_{k\tau}(C_k(\Delta)^{\complement}) = \mathbb{1}_{|m_k - m_{k-1}| \leq \Delta\theta^{1-\iota}}\\
&\times \int_{(x,x')\in\mathbb{R}^2} \frac{\psi_k(x,x')}{\langle \widetilde{Q}\pi_{(k-1)\tau}, \psi_{k\tau}\rangle} \mathbb{1}_{C_k(\Delta)^{\complement}}(x')(\mathbb{1}_{C_{k-1}(2\Delta)}(x) + \mathbb{1}_{C_{k-1}(2\Delta)^{\complement}}(x))\widetilde{Q}\pi_{(k-1)\tau}(dx, dx')\,,
\end{aligned}
$$

Où $\langle \widetilde{Q}\pi_{(k-1)\tau}, \psi_{k\tau}\rangle$ est l'intégrale pour la fonction $\psi_{k\tau}$ par rapport à la mesure $\widetilde{Q}\pi_{(k-1)\tau}$.
D'autre part,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(Y_{k\tau} \in dy | Y_{0:(k-1)\tau}\right) &= \int_{(x,x')\in\mathbb{R}^2} \mathbb{P}\left(Y_{k\tau} \in dy | X_{(k-1)\tau} = x, X_{k\tau} = x'\right)\\
&\quad \times \mathbb{P}\left(\left(X_{(k-1)\tau}, X_{k\tau}\right) \in (dx, dx') \middle| Y_{0:(k-1)\tau}\right)\\
&\quad \text{(Grâce au lemme 1.3 et au lemme 1.6)}\\
&= \int_{(x,x')\in\mathbb{R}^2} \psi_{k\tau}(y, x, x')\, \widetilde{Q}\pi_{(k-1)\tau}(dx, dx')\, \hat{\lambda}_{k\tau}(dy)
\end{aligned}
$$

Nous obtenons donc :

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{|m_k - m_{k-1}| \leq \Delta\theta^{1-\iota}} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\psi_{k\tau}(x,x')}{\langle \widetilde{Q}\pi_{(k-1)\tau}, \psi_{k\tau}\rangle} \mathbb{1}_{C_k(\Delta)^{\complement}}(x')\mathbb{1}_{C_{k-1}(2\Delta)}(x)\widetilde{Q}\pi_{(k-1)\tau}(dx, dx') \middle| Y_{0:(k-1)\tau}\right) \tag{4.15}$$

$$= \int_{y\in\mathcal{C}([(k-1)\tau,k\tau])} \mathbb{1}_{|m_k-m_{k-1}|\leq\Delta\theta^{1-\iota}} \int_{\mathbb{R}^2} \psi_{k\tau}(y,x,x')\mathbb{1}_{C_k(\Delta)^{\complement}}(x')\mathbb{1}_{C_{k-1}(2\Delta)}(x)\widetilde{Q}\pi_{k-1}(dx,dx')\hat{\lambda}_{k\tau}(dy)$$

(En utilisant lemme 2.11, lemme 4.3 et le théorème de Fubini)

$$\leq \sigma_1\sigma_2 e^{4\left|M^2(1,-1)\kappa^{-1}(1,-1)^T\right|+\frac{3}{2}\tau M(M+2)} \times \int_{(x,x')\in\mathbb{R}^2}\int_{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2\,:\,|m_k(t_2)-m_{k-1}|\leq\Delta\theta^{1-\iota}} e^{6M|x-x'|}$$
$$\times e^{-\frac{1}{4A_2}\left(\left|\frac{t_1}{p_{1,1}}-\frac{p_{2,1}t_2}{p_{1,1}}-2A_2p_{1,1}x\right|-4M\left|\frac{1+p_{2,1}}{p_{1,1}}\right|\right)^2} e^{-\frac{1}{4B_2}\left(\left|t_2-2B_2(p_{2,1}x+x')\right|-4M\right)^2}$$
$$\times \mathbb{1}_{C_k(\Delta,t_1,t_2)^{\complement}}(x')\mathbb{1}_{C_{k-1}(2\Delta)}(x)dt_1dt_2\widetilde{Q}\pi_{k-1}(dx,dx')\,.$$

Pareillement, nous obtenons :

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\psi_{k\tau}(x,x')}{\langle\widetilde{Q}\pi_{(k-1)\tau},\psi_{k\tau}\rangle}\mathbb{1}_{C_k(\Delta)^{\complement}}(x')\mathbb{1}_{C_{k-1}(2\Delta)^{\complement}}(x)\widetilde{Q}\pi_{k-1}(dx,dx')\middle| Y_{0:(k-1)\tau}\right)$$
$$= \int_{y\in\mathcal{C}([(k-1)\tau,k\tau])}\int_{\mathbb{R}^2}\psi_{k\tau}(y,x,x')\mathbb{1}_{C_k(\Delta)^{\complement}}(x')\mathbb{1}_{C_{k-1}(2\Delta)^{\complement}}(x)\widetilde{Q}\pi_{(k-1)\tau}(dx,dx')\hat{\lambda}_{k\tau}(dy)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^2}\mathbb{1}_{C_k(\Delta)^{\complement}}(x')\mathbb{1}_{C_{k-1}(2\Delta)^{\complement}}(x)\widetilde{Q}\pi_{(k-1)\tau}(dx,dx') \leq \pi_{(k-1)\tau}(C_{k-1}(2\Delta)^{\complement})\,.$$

Pour tous $x\in C_{k-1}(2\Delta)$, $x'\in C_k(\Delta,t_2)^{\complement}$,

$$\begin{aligned}|t_2-2B_2(p_{2,1}x+x')| &= \left|-2B_2x'+\frac{t_2}{p_{2,1}+1}+\frac{p_{2,1}}{p_{2,1}+1}t_2-2B_2p_{2,1}x\right|\\ &\geq \frac{\Delta}{1+p_{2,1}}-2B_2p_{2,1}|m_k(t_2)-m_{k-1}|-2B_2p_{2,1}|m_{k-1}-x|\\ &\geq \frac{\Delta\,(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}}-2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\Delta \text{ si } |m_k(t_2)-m_{k-1}|\leq\theta^{1-\iota}\Delta\,.\end{aligned}$$

Donc,

$$\mathbb{E}(\pi_{k\tau}(C_k(\Delta)^{\complement})) \leq \mathbb{P}(|m_k-m_{k-1}|\geq\theta^{1-\iota}\Delta)+\mathbb{E}(\pi_{(k-1)\tau}(C_{k-1}(2\Delta)^{\complement}))$$
$$+\sigma_1\sigma_2\int_{(x,x')\in\mathbb{R}^2}\int_{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2\,:\,|t_2-2B_2(p_{2,1}x+x')|\geq\frac{\Delta(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}}-2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\Delta}$$
$$e^{6M|x-x'|+4\left|M^2(1,-1)\kappa^{-1}(1,-1)^T\right|+\frac{3}{2}\tau M(M+2)}$$
$$\times e^{-\frac{1}{4A_2}\left(\left|\frac{t_1}{p_{1,1}}-\frac{p_{2,1}t_2}{p_{1,1}}-2A_2p_{1,1}x\right|-4M\left|\frac{1+p_{2,1}}{p_{1,1}}\right|\right)^2}$$
$$\times e^{-\frac{1}{4B_2}\left(\left|t_2-2B_2(p_{2,1}x+x')\right|-4M\right)^2}dt_1dt_2\widetilde{Q}\pi_{k-1}(dx,dx')\,.$$

Pour tout x, nous avons :

(4.16)
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathcal{V}_{(k-2)_+\tau,k\tau}\geq x) &= \mathbb{P}\left(\sup_{[(k-2)_+\tau,k\tau]}V_s-\inf_{[(k-2)_+\tau,k\tau]}V_s\geq x\right)\\ &\leq \mathbb{P}\left(\sup_{[(k-2)_+\tau,k\tau]}V_s\geq x/2\right)+\mathbb{P}\left(-\inf_{[(k-2)_+\tau,k\tau]}V_s\geq x/2\right)\\ &= 2\mathbb{P}(2|V_{2\tau}|\geq x)\end{aligned}$$

(4.17)
$$\mathbb{P}(\mathcal{W}_{(k-2)_+\tau,k\tau}\geq x)\leq 2\mathbb{P}(2|W_{2\tau}|\geq x)\,.$$

En utilisant (3.7) et les inégalités au-dessus, nous déduisons:

$$\mathbb{P}(|m_k-m_{k-1}|\geq\theta^{1-\iota}\Delta)\leq 4\mathbb{P}\left(Ch\times 2|W_{2\tau}|\geq\frac{\theta^{1-\iota}\Delta}{3}\right)=4\mathbb{P}\left(|W_1|\geq\frac{\theta^{1-\iota}\Delta}{6Ch\sqrt{2\tau}}\right)$$

En utilisant l'inégalité suivante pour $\mathbb{P}\left(|W_1| \geq \frac{\theta^{1-\iota}\Delta}{6Ch\sqrt{2\tau}}\right)$,

$$z > 0\,, \int_z^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \leq \frac{\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)}{z}\,, \tag{4.18}$$

Nous obtenons :

$$\mathbb{P}(|m_k - m_{k-1}| \geq \theta^{1-\iota}\Delta) \leq \frac{24Ch\sqrt{\tau}}{\theta^{1-\iota}\Delta\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^{1-\iota}\Delta}{6C\sqrt{2\tau}}\right)^2\right). \tag{4.19}$$

Pour tous x et x', nous avons :

$$\begin{aligned} &\int_{(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2\,:\,|t_2-2B_2(p_{2,1}x+x')|\geq\frac{\Delta(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}}-2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\Delta} \\ &\qquad e^{-\frac{1}{4A_2}\left(\left|\frac{t_1}{p_{1,1}}-\frac{p_{2,1}t_2}{p_{1,1}}-2A_2p_{1,1}x\right|-4M\left|\frac{1+p_{2,1}}{p_{1,1}}\right|\right)^2} \\ &\qquad \times e^{-\frac{1}{4B_2}\left(\left|t_2-2B_2(p_{2,1}x+x')\right|-4M\right)^2} dt_1 dt_2 \\ &\qquad (\text{Changement des variables : } \begin{pmatrix} t_1' \\ t_2' \end{pmatrix} = (P^{-1})^T \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}) \\ &= \int_{(t_1',t_2')\in\mathbb{R}^2\,:\,|t_2'-2B_2(p_{2,1}x+x')|\geq\frac{\Delta(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}}-2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\Delta} e^{-\frac{1}{4A_2}\left(\left|t_1'-2A_2p_{1,1}x\right|-4M\left|\frac{1+p_{2,1}}{p_{1,1}}\right|\right)^2} \\ &\qquad \times e^{-\frac{1}{4B_2}\left(\left|t_2'-2B_2(p_{2,1}x+x')\right|-4M\right)^2} p_{1,1} dt_1' dt_2' \\ &\qquad (\text{A partir de (4.18) et du théorème de Fubini, voyons aussi l'explication A.2}) \\ &\qquad \leq \left(8M\frac{|1+p_{2,1}|}{p_{1,1}} + 2\sqrt{\pi A_2}\right) \frac{4B_2}{d(\Delta)} \exp\left(-\frac{1}{4B_2}\left(d(\Delta)\right)^2\right) p_{1,1}\,. \end{aligned} \tag{4.20}$$

D'autre part, à partir du lemme 2.1,

$$\begin{aligned} &\int_{(x,x')\in\mathbb{R}^2} e^{6M|x-x'|}\widetilde{Q}\pi_{(k-1)\tau}(dx,dx') \\ &\leq \int_{(x,x')\in\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \exp\left(-\frac{(x-x')^2}{2\tau} + 7M|x-x'| + \frac{\tau M}{2}\right) dx'\pi_{k-1}(dx) \\ &\qquad \leq 2\exp\left(\frac{49}{2}M^2\tau + \frac{\tau M}{2}\right). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\pi_{k\tau}(C_k(\Delta)^\complement)) \leq{}& \mathbb{E}(\pi_{(k-1)\tau}(C_{k-1}(2\Delta)^\complement)) + \frac{24Ch\sqrt{\tau}}{\theta^{1-\iota}\Delta\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^{1-\iota}\Delta}{6C\sqrt{2\tau}}\right)^2\right) \\ &+ \left(8M\frac{|1+p_{2,1}|}{p_{1,1}} + 2\sqrt{\pi A_2}\right)\sigma_1\sigma_2 p_{1,1}\frac{8B_2}{d(\Delta)} \\ &\times \exp\left(-\frac{1}{4B_2}\left(d(\Delta)\right)^2 + \frac{49}{2}M^2\tau + \frac{\tau M}{2}(3M+7) + 4\left|M^2(1,-1)\kappa^{-1}(1,-1)^T\right|\right). \end{aligned}$$

En notant que, pour tout $i > 0$,

$$d(2^i\Delta) = 2^i d(\Delta) + 4M(2^i - 1) \geq 2^i d(\Delta) \geq d(\Delta)$$

Nous obtenons, donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\pi_{k\tau}(C_k(\Delta)^\complement)) \leq{}& \mathbb{E}(\pi_0(C_0(2^k\Delta)^\complement)) + \sum_{i=0}^{k-1}\left(\frac{24Ch\sqrt{\tau}}{2^i\theta^{1-\iota}\Delta\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{2^i\theta^{1-\iota}\Delta}{6C\sqrt{2\tau}}\right)^2\right)\right. \\ &+ \left(8M\frac{|1+p_{2,1}|}{p_{1,1}} + 2\sqrt{\pi A_2}\right)\sigma_1\sigma_2 p_{1,1} \end{aligned}$$

$$\times \frac{8B_2 e^{\frac{49}{2}M^2\tau+\frac{\tau M}{2}(3M+7)+4\left|M^2(1,-1)\kappa^{-1}(1,-1)^T\right|}}{d(2^i\Delta)} \exp\left(-\frac{1}{4B_2}\left(d(2^i\Delta)\right)^2\right)\Bigg)$$

$$\leq \mathbb{E}(\pi_0(C_0(\Delta)^{\complement})) + \frac{24Ch\sqrt{\tau}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^{1-\iota}\Delta}{6C\sqrt{2\tau}}\right)^2\right)}{\theta^{1-\iota}\Delta\sqrt{\pi}}\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^i}+$$

$$+\left(8M\frac{|1+p_{2,1}|}{p_{1,1}}+2\sqrt{\pi A_2}\right)$$

$$\times\,\sigma_1\sigma_2 p_{1,1}\frac{8B_2 e^{\frac{49}{2}M^2\tau+\frac{\tau M}{2}(3M+7)+4\left|M^2(1,-1)\kappa^{-1}(1,-1)^T\right|}}{d(\Delta)}\exp\left(-\frac{1}{4B_2}\left(d(\Delta)\right)^2\right)\Bigg)\sum_{i=0}^{+\infty}\frac{1}{2^i}$$

$$= \mathbb{E}(\pi_0(C_0(\Delta)^{\complement})) + \frac{48Ch\sqrt{\tau}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^{1-\iota}\Delta}{6C\sqrt{2\tau}}\right)^2\right)}{\theta^{1-\iota}\Delta\sqrt{\pi}} + \left(8M\frac{|1+p_{2,1}|}{p_{1,1}}+2\sqrt{\pi A_2}\right)$$

$$\times\,\sigma_1\sigma_2 p_{1,1}\frac{16B_2 e^{\frac{49}{2}M^2\tau+\frac{\tau M}{2}(3M+7)+4\left|M^2(1,-1)\kappa^{-1}(1,-1)^T\right|}}{d(\Delta)}\exp\left(-\frac{1}{4B_2}\left(d(\Delta)\right)^2\right).$$

□

COROLLAIRE 4.5. *Supposons que π'_0 et π_0 sont comparables. Sous l'hypothèse du lemme précédent, pour tout $k \geq 0$, nous avons :*

$$\mathbb{E}(\pi'_{k\tau}(C_k(\Delta)^{\complement}) \preceq T(\Delta)e^{h\left(\pi_0,\pi'_0\right)}$$

DÉMONSTRATION. Pour tout $k \geq 0$, nous avons :

$$h\left(\pi_{k\tau},\pi'_{k\tau}\right) \leq h\left(\pi_0,\pi'_0\right) \tag{4.22}$$

D'autre part, pour tout l'ensemble A tel que $\pi'_{k\tau}(A) > 0$, nous avons :

$$\exp\left(-h\left(\pi_{k\tau},\pi'_{k\tau}\right)\right) \leq \frac{\pi_{k\tau}(A)}{\pi'_{k\tau}(A)} \leq \exp\left(h\left(\pi_{k\tau},\pi'_{k\tau}\right)\right) \tag{4.23}$$

Donc,

$$\mathbb{E}(\pi'_{k\tau}(C_k(\Delta)^{\complement}) \leq \mathbb{E}(h\left(\pi_0,\pi'_0\right)\pi_{k\tau}(C_k(\Delta)^{\complement}) \preceq T(\Delta)e^{h\left(\pi_0,\pi'_0\right)}$$

□

PROPOSITION 4.6. *Supposons que Δ satisfait l'hypothèse du lemme précédent. Pour tout $k \geq 1$, nous avons :*

$$\mathbb{E}(\|\pi'_{k\tau} - \overline{R}_k^{\Delta}(\pi'_{(k-1)\tau})\|) \preceq T(\Delta)e^{2h\left(\pi_0,\pi'_0\right)}.$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 4.6. Définissons des mesures sur $\mathbb{R}^2$:

$$\mu = \widetilde{Q}\pi'_{(k-1)\tau},$$

$$\mu'(dx,dx') = \mathbb{1}_{C_k(\Delta)}(x')\widetilde{Q}(\mathbb{1}_{C_{k-1}(\Delta)}\pi'_{(k-1)\tau})(dx,dx') + \pi'_{(k-1)\tau}(C_{k-1}(\Delta)^{\complement})\xi_1(D_k,\Delta)\mathbb{1}_{C_k(\Delta)}(x')dxdx',$$

Où :

$$\widetilde{Q}(\mathbb{1}_{C_{k-1}(\Delta)}\pi'_{(k-1)\tau})(dx,dx') = \mathbb{1}_{C_{k-1}(\Delta)}(x)\pi'_{(k-1)\tau}(dx)Q(x,dx').$$

Par définition 3.14 de l'opérateur $\overline{R}^{\Delta}$ et en utilisant les calculs dans **[OR05]**, page 433, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\|\pi'_{k\tau} - \overline{R}_k^{\Delta}(\pi'_{(k-1)\tau})\|_{TV} &\leq \|\psi_{k\tau}\bullet\mu - \psi_{k\tau}\bullet\mu'\|_{TV}\\ &\leq 2\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\psi_{k\tau}(x,x')}{\langle\widetilde{Q}\pi'_{(k-1)\tau},\psi_{k\tau}\rangle}\times[\mathbb{1}_{C_k(\Delta)^{\complement}}(x')\widetilde{Q}(\mathbb{1}_{C_{k-1}(\Delta)}\pi'_{(k-1)\tau})(dx,dx')\end{aligned}$$

$$+\widetilde{Q}(\mathbb{1}_{C_{k-1}(\Delta)^c}\pi'_{(k-1)\tau})(dx,dx')$$
$$+\pi'_{(k-1)\tau}(C_{k-1}(\Delta)^{\complement})\xi_1(D_k,\Delta)\mathbb{1}_{C_k(\Delta)}(x')dxdx'] . \tag{4.24}$$

Nous avons :

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\psi_{k\tau}(x,x')}{\langle\widetilde{Q}\pi'_{(k-1)\tau},\psi_{k\tau}\rangle}\times\widetilde{Q}(\mathbb{1}_{C_{k-1}(\Delta)^{\complement}}\pi'_{(k-1)\tau})(dx,dx')\middle| Y_{0:(k-1)\tau}\right) \tag{4.25}$$
$$=\int_{y\in\mathcal{C}([(k-1)\tau,k\tau])}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\psi(y,x,x')}{\langle\widetilde{Q}\pi'_{(k-1)\tau},\psi_{k\tau}\rangle}\mathbb{1}_{C_{k-1}(\Delta)^{\complement}}(x)\widetilde{Q}\pi'_{(k-1)\tau}(dx,dx')$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{Q}\pi_{(k-1)\tau}\,(du,du')\,\psi\,(y,u,u')\,\hat{\lambda}_{k\tau}(dy)$$
$$\text{(grâce aux (4.22) et (4.23))}$$
$$\leq e^{h(\pi_0,\pi'_0)}\int_{y\in\mathcal{C}([(k-1)\tau,k\tau])}\int_{\mathbb{R}^2}\psi(y,x,x')\mathbb{1}_{C_{k-1}(\Delta)^{\complement}}(x)\widetilde{Q}\pi'_{(k-1)\tau}(dx,dx')\hat{\lambda}_{k\tau}(dy)$$
$$=e^{h(\pi_0,\pi'_0)}\pi'_{(k-1)\tau}(C_{k-1}(\Delta)^{\complement})$$

Et,

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\psi_{k\tau}(x,x')}{\langle\widetilde{Q}\pi'_{(k-1)\tau},\psi_{k\tau}\rangle}\pi'_{(k-1)\tau}(C_{k-1}(\Delta)^{\complement})\xi_1(D_k,\Delta)\mathbb{1}_{C_k(\Delta)}(x')dxdx'\middle| Y_{0:(k-1)\tau}\right) \tag{4.26}$$
$$\leq e^{h(\pi_0,\pi'_0)}\int_{y\in\mathcal{C}([(k-1)\tau,k\tau])}\int_{\mathbb{R}^2}\psi(y,x,x')\pi'_{(k-1)\tau}(C_{k-1}(\Delta)^{\complement})\xi_1(D_k,\Delta)\mathbb{1}_{C_k(\Delta)}(x')dxdx'\hat{\lambda}_{k\tau}(dy)$$
$$\leq e^{h(\pi_0,\pi'_0)}\pi'_{(k-1)\tau}(C_{k-1}(\Delta)^{\complement}) .$$

Nous avons :

$$\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{|m_k-m_{k-1}|\leq\Delta\theta^{1-\iota}}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\psi_{k\tau}(x,x')}{\langle\widetilde{Q}\pi'_{(k-1)\tau},\psi_{k\tau}\rangle}\mathbb{1}_{C_k(\Delta)^{\complement}}(x')\widetilde{Q}(\mathbb{1}_{C_{k-1}(\Delta)}\pi'_{(k-1)\tau})(dx,dx')\middle| Y_{0:(k-1)\tau}\right)$$
$$=\int_{y\in\mathcal{C}([(k-1)\tau,k\tau])}\mathbb{1}_{|m_k-m_{k-1}|\leq\Delta\theta^{1-\iota}}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\psi(y,x,x')}{\langle\widetilde{Q}\pi'_{(k-1)\tau},\psi_{k\tau}\rangle}\mathbb{1}_{C_k(\Delta)^{\complement}}(x')\mathbb{1}_{C_{k-1}(\Delta)}(x)\widetilde{Q}\pi'_{(k-1)\tau}(dx,dx')$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^2}\widetilde{Q}\pi_{(k-1)\tau}\,(du,du')\,\psi\,(y,u,u')\,\hat{\lambda}_{k\tau}(dy)$$
$$\text{(à partir des (4.22) , (4.23))}$$
$$\leq e^{2h(\pi_0,\pi'_0)}\int_{y\in\mathcal{C}([(k-1)\tau,k\tau])}\mathbb{1}_{|m_k-m_{k-1}|\leq\Delta\theta^{1-\iota}}\int_{\mathbb{R}^2}\psi(y,x,x')\mathbb{1}_{C_k(\Delta)^{\complement}}(x')\mathbb{1}_{C_{k-1}(2\Delta)}(x)\widetilde{Q}\pi_{(k-1)\tau}(dx,dx')\hat{\lambda}_{k\tau}(dy)$$
$$\text{(à partir des (4.15), (4.20) et (4.21))}$$
$$\leq e^{2h(\pi_0,\pi'_0)}\left(8M\frac{|1+p_{2,1}|}{p_{1,1}}+2\sqrt{\pi A_2}\right)\sigma_1\sigma_2p_{1,1}\frac{8B_2}{d(\Delta)}$$
$$\times\exp\left(-\frac{1}{4B_2}d(\Delta)^2+\frac{49}{2}M^2\tau+\frac{\tau M}{2}(3M+7)+4\left|M^2(1,-1)\kappa^{-1}(1,-1)^T\right|\right)$$

Utilisons en plus l'expression (4.19), nous obtenons :

$$\mathbb{E}\left(\int_{\mathbb{R}^2}\frac{\psi_{k\tau}(x,x')}{\langle\widetilde{Q}\pi_{(k-1)\tau},\psi_{k\tau}\rangle}\mathbb{1}_{C_k(\Delta)^{\complement}}(x')\widetilde{Q}(\mathbb{1}_{C_{k-1}(\Delta)}\pi_{(k-1)\tau})(dx,dx')\middle| Y_{0:(k-1)\tau}\right)\leq e^{2h(\pi_0,\pi'_0)}T(\Delta) \tag{4.27}$$

Donc, la proposition 4.6 est bien montrée grâce aux (4.24) − (4.27) et grâce au lemme 4.4. □

COROLLAIRE 4.7. *Supposons que Δ satisfait l'hypothèse du lemme précédent. Pour tout $k \geq 1$, nous avons :*

$$\mathbb{E}(\|\pi_{k\tau} - \overline{R}_k^{\Delta}(\pi_{(k-1)\tau})\|) \preceq T(\Delta)$$

4.1.2. L'erreur globale. Rappelons que " $\underset{\triangle}{\preceq}$ " est définie dans la définition 2.6, nous avons le résultat suivant. Notons $\|.\|$ pour la norme de variation totale. Nous avons les résultat suivants.

LEMME 4.8. *Pour tous $n \geq 1$ et k dans $\{1, 2, \ldots n-1\}$, pour toutes mesures μ et μ' dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$,*

$$\|\overline{R}_{n:k+1}^{\Delta}(\mu) - \overline{R}_{n:k+1}^{\Delta}(\mu')\| \leq$$

$$\leq 2 \prod_{i=1}^{\lfloor\frac{n-k}{2}\rfloor} (1 - c_0(\epsilon_{k+2i-1}^2 \epsilon_{k+2i} \epsilon'_{k+2i})^2) \left(\inf\left(1, \frac{\|\mu - \mu'\|}{c_0(\epsilon_{k+1}^2 \epsilon_{k+2} \epsilon'_{k+2})^2}\right)\right)$$

DÉMONSTRATION. Nous allons montrer ce lemme dans le cas où $n-k$ est impair, nous faisons de la même manière avec le cas pair. À partir de la proposition 3.7, de la remarque 3.8, pour toute mesure $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, pour toute fonction test φ, nous avons :

$$\overline{R}_{n:k+1}^{\Delta}(\mu)(\varphi) \propto \int \varphi\left(u_{n+1}^{(1)}\right) \prod_{i=1}^{(n-k)/2} \psi_{k+2i-1}^{\Delta}(u_{k+2i-1}) \prod_{i=1}^{(n-k-2)/2} S_{n|k+2i-1}^{U}(u_{k+2i-1}, du_{k+2i+1})$$
$$\times S_{n|n+1}^{U}\left(u_{n-1}, du_n^{(1)}\right) \int_{z' \in \mathbb{R}} S_{n|k}^{\Delta}\left(\left(0, z_k^{(2)}\right), \left(du_{k+1}^{(2)}, dz'\right)\right) \left(\psi_{n|k}^{\Delta}(0, .) \bullet \mu\right) \left(dz_k^{(2)}\right)$$

Où on intègre sur $z_k^{(2)} \in \mathbb{R}$, $u_{k+1}, u_{k+3}, \ldots, u_{n-1}$ dans $\mathbb{R}^2$ et $u_n^{(1)} \in \mathbb{R}$. À partir de la proposition 3.4, pour tout i dans $\{1, 2, \ldots, 1 + (n-k)/2\}$, nous savons que $S_{n|k+2i-1}^{U}$ est mélangeant avec le coefficient $c_0(\epsilon_{k+2i-1}^2 \epsilon_{k+2i} \epsilon'_{k+2i})^2$. À partir la la proposition 1.1 et de l'équation (1.4), nous obtenons :

$$\|\overline{R}_{n:k+1}^{\Delta}(\mu) - \overline{R}_{n:k+1}^{\Delta}(\mu')\| \leq$$

$$\leq 2 \prod_{i=1}^{\lfloor\frac{n-k}{2}\rfloor} (1 - c_0(\epsilon_{k+2i-1}^2 \epsilon_{k+2i} \epsilon'_{k+2i})^2) \left(\inf\left(1, \frac{\|\mu - \mu'\|}{c_0(\epsilon_{k+1}^2 \epsilon_{k+2} \epsilon'_{k+2})^2}\right)\right)$$

□

PROPOSITION 4.9. *Il existe h_∞ et τ_∞ telles que, si $h \geq h_\infty$ et $\tau \geq \tau_\infty$, alors, pour tout $n \geq 0$,*

$$\log(\mathbb{E}(\|\pi_{n\tau} - \pi_{n\tau}^{\Delta}\|)) \underset{\triangle}{\preceq} -\frac{1}{4B_2}\left(\frac{1 - 2p_{2,1}}{1 + p_{2,1}} - 2\theta^{1-\iota} B_2 p_{2,1}\right)^2 \Delta^2$$

Et,

$$\log(\mathbb{E}(\|\pi'_{n\tau} - (\pi')_{n\tau}^{\Delta}\|)) \underset{\triangle}{\preceq} -\frac{1}{4B_2}\left(\frac{1 - 2p_{2,1}}{1 + p_{2,1}} - 2\theta^{1-\iota} B_2 p_{2,1}\right)^2 \Delta^2 + h(\pi_0, \pi'_0)$$

DÉMONSTRATION. Nous avons :

$$\|\pi_{n\tau} - \pi_{n\tau}^{\Delta}\| \leq \|\pi_{n\tau} - \overline{R}_n^{\Delta}(\pi_{(n-1)\tau})\| + \sum_{k=1}^{n-1} \|\overline{R}_{n:k+1}^{\Delta}(\pi_{k\tau}) - \overline{R}_{n:k+1}^{\Delta}(\overline{R}_k^{\Delta}(\pi_{(k-1)\tau}))\| \tag{4.28}$$

Fixons $k \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$. A partir du lemme précédent, nous avons :

$$\begin{aligned} &\|\overline{R}_{n:k+1}^{\Delta}(\pi_{k\tau}) - \overline{R}_{n:k+1}^{\Delta}(\overline{R}_k^{\Delta}(\pi_{(k-1)\tau}))\| \\ &\leq 2 \prod_{i=1}^{\lfloor\frac{n-k}{2}\rfloor} (1 - c_0(\epsilon_{k+2i-1}^2 \epsilon_{k+2i} \epsilon'_{k+2i})^2) \left(\inf\left(1, \frac{\|\pi_{k\tau} - \overline{R}_k^{\Delta}(\pi_{(k-1)\tau})\|}{c_0(\epsilon_{k+1}^2 \epsilon_{k+2} \epsilon'_{k+2})^2}\right)\right) . \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\leq 2 \prod_{i=2}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} (1 - c_0(\epsilon_{k+2i-1}^2 \epsilon_{k+2i} \epsilon'_{k+2i})^2) \left(\inf \left(1, \frac{\|\pi_{k\tau} - \overline{R}_k^{\Delta}(\pi_{(k-1)\tau})\|}{c_0(\epsilon_{k+1}^2 \epsilon_{k+2} \epsilon'_{k+2})^2} \right) \right) .$$

A partir du lemme 3.9, nous obtenons :

$$\begin{aligned} (4.30) \quad & \mathbb{E}(\|\overline{R}_{n:k+1}^{\Delta}(\pi_{k\tau}) - \overline{R}_{n:k+1}^{\Delta}(\overline{R}_k^{\Delta}(\pi_{(k-1)\tau}))\|) \\ & = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\|\overline{R}_{n:k+1}^{\Delta}(\pi_{k\tau}) - \overline{R}_{n:k+1}^{\Delta}(\overline{R}_k^{\Delta}(\pi_{(k-1)\tau}))\| \mid Y_{0:(k+2)\tau})) \\ & \leq 2 \left(1 - c_0 \frac{(\epsilon^3(L,\Delta)\epsilon'(L,\Delta))^2}{2} \right)^{(\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor - 2)_+} \mathbb{E} \left(\inf \left(1, \frac{\|\pi_{k\tau} - \overline{R}_k^{\Delta}(\pi_{(k-1)\tau})\|}{c_0(\epsilon_{k+1}^2 \epsilon_{k+2} \epsilon'_{k+2})^2} \right) \right) . \end{aligned}$$

A partir de [**OR05**], page 434, nous pouvons borner :

(4.31)

$$\inf \left(1, \frac{\|\pi_{k\tau} - \overline{R}_k^{\Delta}(\pi_{(k-1)\tau})\|}{c_0(\epsilon_{k+1}^2 \epsilon_{k+2} \epsilon'_{k+2})^2} \right) \leq \inf \left(1, \frac{T(\Delta)}{c_0^2(\epsilon_{k+1}^2 \epsilon_{k+2} \epsilon'_{k+2})^4} \right) + \inf \left(1, \frac{\|\pi_{k\tau} - \overline{R}_k^{\Delta}(\pi_{(k-1)\tau})\|^2}{T(\Delta)} \right) ,$$

$$\begin{aligned} (4.32) \quad & \mathbb{E} \left(\inf \left(1, \frac{\|\pi_{k\tau} - \overline{R}_k^{\Delta}(\pi_{(k-1)\tau})\|^2}{T(\Delta)} \right) \right) \\ & = \mathbb{E} \left(\frac{\|\pi_{k\tau} - \overline{R}_k^{\Delta}(\pi_{(k-1)\tau})\|^2}{T(\Delta)} \mathbb{1}_{[0,1]} \left(\frac{\|\pi_{k\tau} - \overline{R}_k^{\Delta}(\pi_{(k-1)\tau})\|^2}{T(\Delta)} \right) \right) \\ & \quad + \mathbb{P} \left(\frac{\|\pi_{k\tau} - \overline{R}_k^{\Delta}(\pi_{(k-1)\tau})\|^2}{T(\Delta)} > 1 \right) \\ & \leq \frac{2}{\sqrt{T(\Delta)}} \mathbb{E}(\|\pi_{k\tau} - \overline{R}_k^{\Delta}(\pi_{(k-1)\tau})\|) (\text{Grâce à la prop. 4.6}) \preceq \sqrt{T(\Delta)} . \end{aligned}$$

Maintenant, nous traîtons le terme $\inf(1, T(\Delta) c_0^{-2} (\epsilon_{k+1}^2 \epsilon_{k+2} \epsilon'_{k+2})^{-4})$. Notons :

(4.33)

$$\epsilon_1(z) = \begin{cases} \exp \left(\frac{12 z \Delta}{\tau B_2(1+p_{2,1})} + 12M(z + \frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})}) + 3\tau M(M+2) \right) & \text{si } z \geq \frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})} , \\ \exp \left(\frac{3\left(z + \frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})}\right)^2}{\tau} + 12M(z + \frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})}) + 3\tau M(M+2) \right) & \text{si non} . \end{cases}$$

$$(4.34) \quad \epsilon_2(z) = \exp \left(4 B_2 p_{2,1}^2 \left(\frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})} + z \right)^2 + 4(2M + \Delta |p_{2,1}|) \left(\frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})} + z \right) \right) .$$

Nous obtenons que les fonctions $\epsilon_1(z)$ et $\epsilon_2(z)$ sont croissantes par rapport à z.
A partir de (3.6), (3.7), nous obtenons:

$$(4.35) \qquad D_{k+1} \leq C(\tau M + \mathcal{V}_{(k-1)\tau,(k+2)\tau} + \mathcal{W}_{(k-1)\tau,(k+2)\tau}) ,$$

$$(4.36) \qquad D_{k+2} \leq C(\tau M + \mathcal{V}_{(k-1)\tau,(k+2)\tau} + \mathcal{W}_{(k-1)\tau,(k+2)\tau}) .$$

Notons $Z \triangleq \mathcal{V}_{(k-1)\tau,(k+2)\tau} + \mathcal{W}_{(k-1)\tau,(k+2)\tau}$. Donc,

$$(4.37) \qquad (\epsilon_{k+1}^2 \epsilon_{k+2} \epsilon'_{k+2})^{-4} \leq \epsilon_1(C(\tau M + Z)) \epsilon_2(C(\tau M + Z)))$$

Comme les variables $\mathcal{V}_{(k-1)\tau,(k+2)\tau}$ et $\mathcal{W}_{(k-1)\tau,(k+2)\tau}$ sont indépendantes et contrôlées par des équations (4.16) et (4.17), nous pouvons majorer :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \mathbb{P}\left(\mathcal{V}_{(k-1)\tau,(k+2)\tau} + \mathcal{W}_{(k-1)\tau,(k+2)\tau} \geq x\right) & \leq 2\mathbb{P}(2\mathcal{W}_{0,3\tau} \geq x/2) \\ & \leq 4\mathbb{P}(4|W_{3\tau}| \geq x) \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\left(\inf\left(1,T(\Delta)c_0^{-2}\epsilon_1\left(C\left(\tau M+Z\right)\right)\epsilon_2\left(C\left(\tau M+Z\right)\right)\right)\mathbb{1}_{Z\leq\frac{\Delta}{CB_2(1+p_{2,1})}-\tau M}\right)\preceq T(\Delta)c_0^{-2} \tag{4.38}$$
$$\times\int_0^{\frac{\Delta}{CB_2(1+p_{2,1})}}\exp\left(\frac{3\left(C\left(\tau M+z\right)+\frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})}\right)^2}{\tau}+12M(C\left(\tau M+z\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})})+3\tau M\left(M+2\right)\right)\times\exp\left(4B_2p_{2,1}^2\left(\frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})}+C\left(\tau M+z\right)\right)^2\right.$$
$$\left.+4\left(2M+\Delta|p_{2,1}|\right)\left(\frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})}+C\left(\tau M+z\right)\right)\right)\times e^{-\frac{z^2}{6\tau}}dz$$

Nous majorons l'intégrale au-dessus par :

$$\frac{\Delta}{CB_2(1+p_{2,1})}\times\exp\left(\left(4B_2p_{2,1}^2+\frac{3}{\tau}\right)\left(C\tau M+\frac{(C+1)\,\Delta}{B_2(1+p_{2,1})}\right)^2+\right.$$
$$\left.+4\left(5M+\Delta|p_{2,1}|\right)\left(C\tau M+\frac{(C+1)\,\Delta}{B_2(1+p_{2,1})}\right)+3\tau M\left(M+2\right)\right)$$

Nous avons :

$$\pm\log\left(\Delta\right)-\Delta^2\underset{\triangle}{\preceq}-\Delta^2$$

Pour la fonction $T(\Delta)$ qui est définie dans la formule (3.9), nous avons donc :

$$\log(T(\Delta))\underset{\triangle}{\preceq}-\frac{1}{4B_2}\left(\frac{(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}}-2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\right)^2\Delta^2\,. \tag{4.39}$$

Il existe donc h_0 et τ_0 telles que pour tous $h\geq h_0$ et $\tau\geq\tau_0$, nous avons :

$$\log\left(\mathbb{E}\left(\inf\left(1,T(\Delta)c_0^{-2}\epsilon_1\left(C\left(\tau M+Z\right)\right)\epsilon_2\left(C\left(\tau M+Z\right)\right)\right)\mathbb{1}_{Z\leq\frac{\Delta}{CB_2(1+p_{2,1})}-\tau M}\right)\right) \tag{4.40}$$
$$\underset{\triangle}{\preceq}-\frac{1}{4B_2}\left(\frac{(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}}-2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\right)^2\Delta^2$$

Maintenant, considérons :

$$\mathbb{E}\left(\inf\left(1,c_0^{-2}T(\Delta)\epsilon_1\left(C\left(\tau M+Z\right)\right)\epsilon_2\left(C\left(\tau M+Z\right)\right)\right)\mathbb{1}_{Z\geq\frac{\Delta}{CB_2(1+p_{2,1})}-\tau M}\right)$$

Pour tout $z>0$, posons :

$$\Phi(z)=c_0^{-2}T(\Delta)\times\exp\left(\frac{12C\left(\tau M+z\right)\Delta}{\tau B_2(1+p_{2,1})}+3\tau M\left(M+2\right)\right)$$
$$\times\exp\left(4B_2p_{2,1}^2\left(\frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})}+C\left(\tau M+z\right)\right)^2+\right.$$
$$\left.+4\left(5M+\Delta|p_{2,1}|\right)\left(\frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})}+C\left(\tau M+z\right)\right)\right).$$

La fonction $\Phi(z)$ est croissante. Remarquons que quand $z\geq\frac{\Delta}{CB_2(1+p_{2,1})}-\tau M$ (ce terme est positif quand Δ est assez grand), le produit $c_0^{-2}T(\Delta)\epsilon_1\left(C\left(\tau M+z\right)\right)\epsilon_2\left(C\left(\tau M+z\right)\right)$ devient $\Phi(z)$. Notons :

$$z_0=\inf\{z\,:\,\Phi(z)\geq1\}\,.$$

Prenons $\epsilon\in(0,1)$, nous voulons montrer que $z_0\geq\Delta\tau^{1-\epsilon}$ quand Δ est assez grand. Considérons $\Phi(\Delta\tau^{1-\epsilon})$. En utilisant le lemme 2.5, nous gagnons :

$$p_{2,1}\underset{\theta\to+\infty}{\sim}-\frac{1}{\theta}\,,\;B_2\underset{\theta\to+\infty}{\longrightarrow}\frac{h}{2}\,.$$

Il existe donc h_1 et τ_1 telles que pour tous $h \geq h_1$ et $\tau \geq \tau_1$, nous avons :

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^{1-\iota}\Delta}{6C\sqrt{2\tau}}\right)^2 > \frac{1}{4B_2}\left(\frac{(1-2p_{2,1})\,\triangle}{1+p_{2,1}} - 2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\triangle - 4M\right)^2$$

Donc,

$$\log(T(\Delta)) \underset{\Delta\to+\infty}{\sim} -\frac{d(\Delta)^2}{4B_2} \underset{\Delta\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{4B_2}\left(\frac{(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}} - 2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\right)^2\Delta^2$$

Il existe h_2 et τ_2 telles que pour tous $h \geq h_2$ et $\tau \geq \tau_2$, nous avons :

$$\frac{1}{4B_2}\left(\frac{(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}} - 2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\right)^2 - \frac{12C}{\tau^{\epsilon}B_2(1+p_{2,1})} -$$
$$- 4B_2p_{2,1}^2\left(\frac{1}{B_2(1+p_{2,1})} + C\tau^{1-\epsilon}\right)^2 - 4|p_{2,1}|\left(\frac{1}{B_2(1+p_{2,1})} + C\tau^{1-\epsilon}\right) > 0$$

Donc, pour tous $h \geq \sup(h_1,h_2)$, $\tau \geq \sup(\tau_1,\tau_2)$, nous avons:

$$\Phi(\Delta\tau^{1-\epsilon}) \underset{\Delta\to+\infty}{\longrightarrow} 0\,,$$

Ce qui confirme qu'il existe $\Delta_1(\tau,h)$ telle que avec pour tout $\Delta \geq \Delta_1(\tau,h)$, nous avons :

$$z_0 \geq \Delta\tau^{1-\epsilon}$$

D'autre part, il existe h_3 et τ_3 telles que pour tous $h \geq h_3$ et $\tau \geq \tau_3$, nous avons :

$$\frac{1}{48\tau} - 4B_2p_{2,1}^2 > 0$$

Ce qui implique que pour tous $h \geq h_3$ et $\tau \geq \tau_3$, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}} \Phi(z)\exp\left(-\frac{z^2}{6\tau}\right)dz$ est finie. On peut donc calculer :

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi(z)\exp\left(-\frac{z^2}{6\tau}\right)dz = c_0^{-2}T(\Delta)\exp\Bigg(4\left(5M+\Delta|p_{2,1}|\right)\left(\frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})} + C\tau M\right)$$
$$+\frac{12\Delta CM}{B_2(1+p_{2,1})} + 4B_2p_{2,1}^2\left(\frac{\Delta}{B_2(1+p_{2,1})} + C\tau M\right)^2 + 3\tau M\,(M+2)\Bigg)$$
$$\times \int_{\mathbb{R}} \exp\Bigg(-\left(\frac{1}{6\tau} - 4B_2p_{2,1}^2C^2\right)z^2 +$$
$$+\left(\frac{12\Delta C}{\tau B_2(1+p_{2,1})} + 8B_2p_{2,1}^2C\left(\frac{\Delta}{B_2\,(1+p_{2,1})} + C\tau M\right) + 4C\left(5M+\Delta|p_{2,1}|\right)\right)z\Bigg)dz$$

La dernière intégrale au-dessus est égale à :

$$\sqrt{2\pi\left(\frac{1}{6\tau} - 4B_2p_{2,1}^2\right)^{-1}} \times \exp\Bigg(\frac{1}{4}\left(\frac{1}{6\tau} - 4B_2p_{2,1}^2\right)^{-1}$$
$$\times\left(\frac{12\Delta C}{\tau B_2(1+p_{2,1})} + 8B_2p_{2,1}^2C\left(\frac{\Delta}{B_2\,(1+p_{2,1})} + C\tau M\right) + 4C\left(5M+\Delta|p_{2,1}|\right)\right)^2\Bigg)\,.$$

Donc, il existe h_4 et τ_4 telles que pour tous $h \geq h_4$ et $\tau \geq \tau_4$, nous avons :

$$\log\left(\int_{\mathbb{R}} \Phi(z)\exp\left(-\frac{z^2}{6\tau}\right)dz\right) \underset{\triangle}{\preceq} -\frac{1}{4B_2}\left(\frac{(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}} - 2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\right)^2\Delta^2. \tag{4.41}$$

Pour tous $h \geq \sup(h_1,h_2,h_3,h_4)$, $\tau \geq \sup(\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4)$, nous pouvons donc majorer :

$$\mathbb{E}\left(\inf\left(1, T(\Delta)c_0^{-2}\epsilon_1\left(C\left(\tau M+Z\right)\right)\epsilon_2\left(C\left(\tau M+Z\right)\right)\right)\mathbb{1}_{Z\geq\frac{\Delta}{CB_2(1+p_{2,1})}-\tau M}\right) \tag{4.42}$$
$$= \mathbb{E}\left(\inf\left(1,\Phi(Z)\right)\mathbb{1}_{Z\geq\frac{\Delta}{CB_2(1+p_{2,1})}-\tau M}\right)$$

$$\preceq \int_0^{z_0} \Phi(z) \exp\left(-\frac{z^2}{6\tau}\right) dz + \int_{z_0}^{+\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{6\tau}\right) dz$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \Phi(z) \exp\left(-\frac{z^2}{6\tau}\right) dz + \frac{\exp\left(-\frac{z_0^2}{6\tau}\right)}{z_0}$$

Par ailleurs,

$$\log\left(\frac{\exp\left(-\frac{z_0^2}{6\tau}\right)}{z_0}\right) \leq -\frac{\Delta^2\tau^{1-2\epsilon}}{6} - \log\Delta - (1-\epsilon)\log\tau$$

$$\underset{\triangle}{\preceq} -\frac{1}{4B_2}\left(\frac{(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}} - 2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\right)^2\Delta^2. \tag{4.43}$$

Donc, à partir des (4.41) – (4.43) et du lemme 2.7, nous obtenons :

$$\log\left(\mathbb{E}\left(\inf\left(1, T(\Delta)c_0^{-2}\epsilon_1\left(C\left(\tau M+Z\right)\right)\epsilon_2\left(C\left(\tau M+Z\right)\right)\right)\mathbb{1}_{Z\geq\frac{\Delta}{CB_2(1+p_{2,1})}-\tau M}\right)\right) \tag{4.44}$$

$$\underset{\triangle}{\preceq} -\frac{1}{4B_2}\left(\frac{(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}} - 2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\right)^2\Delta^2$$

En utilisant le lemme 2.7 et les formules (4.40) et (4.44), nous obtenons avec pour tous $h \geq \sup(h_0,\ldots,h_4)$ et $\tau \geq \sup(\tau_0,\ldots,\tau_4)$,

$$\log\left(\mathbb{E}\left(\inf\left(1, \frac{T(\Delta)}{c_0^2(\epsilon_{k-1}^2\epsilon_k\epsilon_k')^4}\right)\right)\right) \underset{\triangle}{\preceq} -\frac{1}{4B_2}\left(\frac{(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}} - 2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\right)^2\Delta^2 \tag{4.45}$$

A partir des (4.31), (4.32), (4.39), et de (4.45), nous obtenons :

$$\log\left(\mathbb{E}\left(\inf\left(1, \frac{\|\pi_{k\tau} - \overline{R}_k^{\Delta}(\pi_{(k-1)\tau})\|}{c_0(\epsilon_{k-1}^2\epsilon_k\epsilon_k')^2}\right)\right)\right) \underset{\triangle}{\preceq} -\frac{1}{4B_2}\left(\frac{(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}} - 2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\right)^2\Delta^2$$

En utilisant l'inégalité (4.28), nous obtenons :

$$\log\left(\mathbb{E}\left(\|\pi_{n\tau} - \pi_{n\tau}^{\Delta}\|\right)\right) \underset{\triangle}{\preceq} -\log\left(\epsilon^3(L,\Delta)\epsilon'(L,\Delta)\right) - \frac{1}{4B_2}\left(\frac{(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}} - 2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\right)^2\Delta^2$$

$$\underset{\triangle}{\preceq} -\frac{1}{4B_2}\left(\frac{(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}} - 2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\right)^2\Delta^2$$

□

4.2. La stabilité du filtre optimal

On appelle $\pi_{n\tau}$ le filtre bien initialisé avec la vraie condition initiale π_0, et $\pi'_{n\tau}$ le filtre mal initialisé avec la fausse condition initiale π'_0 qui sont définis respectivement, par :

$$\pi_{n\tau} = \overline{R}_{n:1}(\pi_0) \qquad \text{et} \qquad \pi'_{n\tau} = \overline{R}_{n:1}(\pi'_0)$$

Le problème de stabilité consiste à étudier la différence entre le filtre optimal et le filtre mal initialisé. Dans cette section, nous allons établir la stabilité par rapport à la norme variation totale. Nous avons le résultat suivant.

THÉORÈME 4.10. *Soit $\pi'_0 \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ satisfaisant la même condition que π_0 (Hypothèse 3). Supposons que tous les paramètres h, τ , Δ satisfont l'hypothèse 1 et l'hypothèse 2. Alors, il existe une constante positive ν_0 telle que :*

$$\mathbb{E}\left(\|\pi_{n\tau} - \pi'_{n\tau}\|\right) = O(n^{-\nu_0}).$$

DÉMONSTRATION. Nous décomposons :

$$\|\pi_{n\tau}-\pi'_{n\tau}\| \leq \|\pi_{n\tau}-\overline{R}_n^{\Delta}\circ\cdots\circ\overline{R}_1^{\Delta}(\pi_0)\| + \|\overline{R}_n^{\Delta}\circ\cdots\circ\overline{R}_1^{\Delta}(\pi_0)-\overline{R}_n^{\Delta}\circ\cdots\circ\overline{R}_1^{\Delta}(\pi'_0)\| + \|\overline{R}_n^{\Delta}\circ\cdots\circ\overline{R}_1^{\Delta}(\pi'_0)-\pi'_{n\tau}\|. \tag{4.46}$$

Grâce à la proposition 4.9, nous avons :

$$\log(\mathbb{E}(\|\pi_{n\tau}-\overline{R}_n^{\Delta}\circ\cdots\circ\overline{R}_1^{\Delta}(\pi_0)\|)) \underset{\triangle}{\preceq} -\frac{1}{4B_2}\left(\frac{(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}}-2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\right)^2\Delta^2 \tag{4.47}$$

$$\log(\mathbb{E}(\|\pi'_{n\tau}-\overline{R}_n^{\Delta}\circ\cdots\circ\overline{R}_1^{\Delta}(\pi'_0)\|)) \underset{\triangle}{\preceq} -\frac{1}{4B_2}\left(\frac{(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}}-2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\right)^2\Delta^2 \tag{4.48}$$

En utilisant la proposition 3.11, nous obtenons :

$$\mathbb{E}(\|\overline{R}_n^{\Delta}\circ\cdots\circ\overline{R}_1^{\Delta}(\pi_0)-\overline{R}_n^{\Delta}\circ\cdots\circ\overline{R}_1^{\Delta}(\pi'_0)\|) \leq 2\left(1-c_0\frac{(\epsilon(L,\Delta)^3\epsilon'(L,\Delta))^2}{2}\right)^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor}$$

A partir des définitions (3.12), (3.13) et (3.21), (3.24) de ϵ et ϵ', nous avons :

$$\log(\epsilon(L,\Delta)^6\epsilon'(L,\Delta)^2) \underset{\triangle}{\preceq} -\left(\frac{2p_{2,1}^2}{B_2(1+p_{2,1})^2}+\frac{2\,|p_{2,1}|}{B_2(1+p_{2,1})}+\frac{3}{2\tau B_2^2(1+p_{2,1})^2}\right)\Delta^2 \tag{4.49}$$

Pour tout ν, considérons $\Delta_n=\sqrt{\nu\log(n)}$. En utilisant l'inégalité $(1-x)^n\leq e^{-nx}, \forall x\in(0,1), n\in\mathbb{N}$ et l'approximation (4.49), nous obtenons l'existence des constantes $n_0>0$ et b_1 telles que, $\forall n\geq n_0$:

$$\begin{aligned}\left(1-c_0\frac{(\epsilon(L,\Delta_n)^3\epsilon'(L,\Delta_n))^2}{2}\right)^{\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor} &\leq \exp\left(-\frac{c_0}{2}\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor(\epsilon(L,\Delta_n)^3\epsilon'(L,\Delta_n))^2\right)\\ \leq \exp\left(-\frac{c_0}{2}\lfloor\frac{n}{2}\rfloor\exp\left(-b_1\left(\frac{2p_{2,1}^2}{B_2(1+p_{2,1})^2}+\frac{2\,|p_{2,1}|}{B_2(1+p_{2,1})}+\frac{3}{2\tau B_2^2(1+p_{2,1})^2}\right)\Delta_n^2+b_2\right)\right)&\\ &= \exp\left(-\frac{c_0}{2}\lfloor\frac{n-2}{2}\rfloor n^{-\nu'}e^{b_2}\right)\end{aligned} \tag{4.50}$$

Où $\nu'=b_1\nu\left(\frac{2p_{2,1}^2}{B_2(1+p_{2,1})^2}+\frac{2\,|p_{2,1}|}{B_2(1+p_{2,1})}+\frac{3}{2\tau B_2^2(1+p_{2,1})^2}\right)$. A partir de (4.47) et de (4.48), il existe deux constantes b'_1 et b'_2 telles que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\|\pi_{n\tau}-\overline{R}_n^{\Delta_n}\circ\cdots\circ\overline{R}_1^{\Delta_n}(\pi_0)\|) &\leq \exp\left(-\frac{b'_1}{4B_2}\left(\frac{(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}}-2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\right)^2\Delta_n^2+b'_2\right)\\ &= n^{-\nu''}e^{b'_2}\end{aligned} \tag{4.51}$$

Où : $\nu''=\frac{b_2\nu}{4B_2}\left(\frac{(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}}-2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\right)^2$. Nous avons la même borne pour $\mathbb{E}(\|\pi'_{n\tau}-\overline{R}_n^{\Delta_n}\circ\cdots\circ\overline{R}_1^{\Delta_n}(\pi'_0)\|)$. A partir de (4.46) et (4.50) – (4.51), nous obtenons :

$$\mathbb{E}\left(\|\pi_{n\tau}-\pi'_{n\tau}\|\right)\leq 2\exp\left(-\frac{c_0}{2}\lfloor\frac{n}{2}\rfloor n^{-\nu'}e^{b_2}\right)+2n^{-\nu''}e^{b'_2}$$

Pour tout $\epsilon\in(0,1)$, en choisissant :

$$\nu=(1-\epsilon)\left(b_1\left(\frac{2p_{2,1}^2}{B_2(1+p_{2,1})^2}+\frac{2\,|p_{2,1}|}{B_2(1+p_{2,1})}+\frac{3}{2\tau B_2^2(1+p_{2,1})^2}\right)\right)^{-1}$$

Nous obtenons : $v'=1-\epsilon$. En sélectionnant $v_0=\frac{v''}{2}$, nou obtenons :

$$n^{\nu_0}\mathbb{E}\left(\|\pi_{n\tau}-\pi'_{n\tau}\|\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$

□

Conclusion et Développement

L'étude de la stabilité du filtre optimal dans le contexte non linéaire a initié de nombreux travaux. Mais les résultats sont obtenu surtout en temps discret, sous condition ergodique pour le signal ou sous l'hypothèse de mélange (mélange fort) sur le noyau de transition qui sont les conditions fortes. Pour le temps continu, nous n'avons guère de travail théorique qui donne des conditions de stabilité. Dans cette thèse, nous avons considéré un modèle simplifié en temps continue pour le filtrage qui est capable d'appliquer à des problèmes de pistage radar. Nous avons étudié la stabilité pour le filtre $\pi_{n\tau}$ par rapport à sa condition initiale, avec τ satisfaisant l'hypothèse 2. La stabilité du modèle dans notre cadre de travail est établie sans avoir besoin de la propriété ergodique ni de l'hypothèse de mélange sur le signal. En servant la somme téléscopique, nous avons également déduit une approche robuste $\pi_{n\tau}^{\Delta}$ uniformément en temps du filtre optimal qui est stable. Nous avons aussi donné des bornes pour le noyau de transition et pour la fonction de vraisemblance. Dans la limite du temps, il nous reste des questions à développer.

1. Étudier la stabilité du filtre optimal π_t avec pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Pour étudier $\lim_{t\to\infty} \|\pi_t - \pi'_t\|_{VT}$, nous voudrions chercher une constante C_τ telle que :

$$\|\pi_t - \pi'_t\|_{VT} \leq C_\tau \left\| \pi_{\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor \tau} - \pi'_{\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor \tau} \right\|_{VT}$$

La stablité du filtre en temps continu π_t sera obtenu grâce à la stabilité du filtre discrétisé $\pi_{\lfloor \frac{t}{\tau} \rfloor \tau}$.

2. Étudier l'approximation particulaire du filtre optimal. La stabilité du filtre $\pi_{n\tau}$ nous permet de montrer que nous pouvons approximer uniformément en temps par un filtre particulaire $\pi_{n\tau}^N$, où N est le nombre de particule. Le travail à venir sera donc de proposer de nouveaux algorithmes particulaires présentant un comportement plus stable dans le temps que les méthodes particulaires classiques.

Résumé

Le problème de filtrage consiste à estimer l'état d'un système dynamique, applelé signal qui est souvent un processus markovien, à partir d'observation bruitées des états passés du système. Dans ce mémoire, nous considérons un modèle de filtrage en temps continu pour le processus de diffusion. Le but est d'étudier la stabilité du filtre optimal par rapport à sa condition initiale au-delà de l'hypothèse de mélange fort pour le noyau de transition en ignorant l'ergodicité du signal.

ANNEXE A

Démonstrations complémentaires

A.1. Démonstration complémentaire pour le lemme 4.3.

Pour toute fonction test f et pour toute fonction test φ. En utilisant la propriété markovienne pour la suite $\left(Z_{2k} = \left(Z_{2k}^{(1)}, Z_{2k}^{(2)}\right)\right)_{0\le k\le n}$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\text{(A.1)}\quad \mathbb{E}\left(f\left(Z_0^{(2)}, Z_2^{(1)}, Z_2^{(2)}, \dots, Z_{2k}^{(1)}\right)\varphi\left(Z_{2k}^{(2)}, Z_{2k+2}^{(1)}\right)\right) &= \int f\left(z_0^{(2)}, z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, \dots, z_{2k}^{(1)}\right) \\
&\varphi\left(z_{2k}^{(2)}, z_{2k+2}^{(1)}\right)\mathbb{P}\Big(Z_0^{(1)} \in dz_0^{(1)}, Z_0^{(2)} \in dz_0^{(2)}, \dots, Z_{2k}^{(1)} \in dz_{2k}^{(1)}, \\
&, Z_{2k}^{(2)} \in dz_{2k}^{(2)}, Z_{2k+2}^{(1)} \in dz_{2k+2}^{(1)}, Z_{2k+2}^{(2)} \in dz_{2k+2}^{(2)}\Big) \\
&= \int f\left(z_0^{(2)}, z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, \dots, z_{2k-2}^{(1)}, z_{2k-2}^{(2)}, z_{2k}^{(1)}\right)\varphi\left(z_{2k}^{(2)}, z_{2k+2}^{(1)}\right) \\
&\mathbb{P}\left(Z_0 \in \left(dz_0^{(1)}, dz_0^{(2)}\right)\right) S_{2n|0}^{\triangle}\left(z_0^{(1)}, z_0^{(2)}, z_2^{(1)}, z_2^{(2)}\right) S_{2n|2}^{\triangle}\left(z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, z_4^{(1)}, z_4^{(2)}\right) \\
&\dots S_{2n|2k}^{\triangle}\left(z_{2k}^{(1)}, z_{2k}^{(2)}, z_{2k+2}^{(1)}, z_{2k+2}^{(2)}\right) dz_2^{(1)} dz_2^{(2)} dz_4^{(1)} dz_4^{(2)} \dots dz_{2k+2}^{(1)} dz_{2k+2}^{(2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{(A.2)}\quad &\mathbb{E}\left(f\left(Z_0^{(2)}, Z_2^{(1)}, Z_2^{(2)}, \dots, Z_{2k-2}^{(1)}, Z_{2k-2}^{(2)}, Z_{2k}^{(1)}\right)\theta^{\varphi}\left(Z_{2k-2}^{(2)}, Z_{2k}^{(1)}\right)\right) = \\
&= \int f\left(z_0^{(2)}, z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, \dots, z_{2k-2}^{(1)}, z_{2k-2}^{(2)}, z_{2k}^{(1)}\right)\theta^{\varphi}\left(z_{2k-2}^{(2)}, z_{2k}^{(1)}\right) \\
&\mathbb{P}\left(Z_0 \in \left(dz_0^{(1)}, dz_0^{(2)}\right)\right) S_{2n|0}^{\triangle}\left(z_0^{(1)}, z_0^{(2)}, z_2^{(1)}, z_2^{(2)}\right) S_{2n|2}^{\triangle}\left(z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, z_4^{(1)}, z_4^{(2)}\right) \\
&\dots S_{2n|2k-2}^{\triangle}\left(z_{2k-2}^{(1)}, z_{2k-2}^{(2)}, z_{2k}^{(1)}, z_{2k}^{(2)}\right) dz_2^{(1)} dz_2^{(2)} \dots dz_{2k}^{(1)} dz_{2k}^{(2)} \\
&= \int \mathbb{P}\left(Z_0 \in \left(dz_0^{(1)}, dz_0^{(2)}\right)\right) \int f\left(z_0^{(2)}, z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, \dots, z_{2k-2}^{(1)}, z_{2k-2}^{(2)}, z_{2k}^{(1)}\right)\theta^{\varphi}\left(z_{2k-2}^{(2)}, z_{2k}^{(1)}\right) \\
&\times S_{2n|0}^{\triangle}\left(z_0^{(1)}, z_0^{(2)}, z_2^{(1)}, z_2^{(2)}\right) S_{2n|2}^{\triangle}\left(z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, z_4^{(1)}, z_4^{(2)}\right) \\
&\dots S_{2n|2k-2}^{\triangle}\left(z_{2k-2}^{(1)}, z_{2k-2}^{(2)}, z_{2k}^{(1)}, z_{2k}^{(2)}\right) dz_2^{(1)} dz_2^{(2)} \dots dz_{2k}^{(1)} dz_{2k}^{(2)} \\
&= \int \mathbb{P}\left(Z_0 \in \left(dz_0^{(1)}, dz_0^{(2)}\right)\right) \int f\left(z_0^{(2)}, z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, \dots, z_{2k-2}^{(1)}, z_{2k-2}^{(2)}, z_{2k}^{(1)}\right) S_{2n|0}^{\triangle}\left(z_0^{(1)}, z_0^{(2)}, z_2^{(1)}, z_2^{(2)}\right) \\
&S_{2n|2}^{\triangle}\left(z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, z_4^{(1)}, z_4^{(2)}\right) \dots S_{2n|2k-4}^{\triangle}\left(z_{2k-4}^{(1)}, z_{2k-4}^{(2)}, z_{2k-2}^{(1)}, z_{2k-2}^{(2)}\right) \\
&\left(\theta^{\varphi}\left(z_{2k-2}^{(2)}, z_{2k}^{(1)}\right)\int_{\mathbb{R}} S_{2n|2k-2}^{\triangle}\left(z_{2k-2}^{(1)}, z_{2k-2}^{(2)}, z_{2k}^{(1)}, z_{2k}^{(2)}\right) dz_{2k}^{(2)}\right) dz_2^{(1)} dz_2^{(2)} \dots dz_{2k}^{(1)} \\
&= \int \mathbb{P}\left(Z_0 \in \left(dz_0^{(1)}, dz_0^{(2)}\right)\right) \int f\left(z_0^{(2)}, z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, \dots, z_{2k-2}^{(1)}, z_{2k-2}^{(2)}, z_{2k}^{(1)}\right) S_{2n|0}^{\triangle}\left(z_0^{(1)}, z_0^{(2)}, z_2^{(1)}, z_2^{(2)}\right) \\
&\times S_{2n|2}^{\triangle}\left(z_2^{(1)}, z_2^{(2)}, z_4^{(1)}, z_4^{(2)}\right) \dots S_{2n|2k-4}^{\triangle}\left(z_{2k-4}^{(1)}, z_{2k-4}^{(2)}, z_{2k-2}^{(1)}, z_{2k-2}^{(2)}\right) \times \\
&\int \varphi\left(z_{2k}^{(2)}, z_{2k+2}^{(1)}\right) S_{2n|(2k-2)}^{\triangle}\left(z_{2k-2}^{(1)}, z_{2k-2}^{(2)}, z_{2k}^{(1)}, z_{2k}^{(2)}\right)
\end{aligned}$$

$$S^{\triangle}_{2n|2k}\left(z^{(1)}_{2k}, z^{(2)}_{2k}, z^{(1)}_{2k+2}, z^{(2)}_{2k+2}\right) dz^{(2)}_{2k} dz^{(1)}_{2k+2} dz^{(2)}_{2k+2} dz^{(1)}_{2} dz^{(2)}_{2} \dots dz^{(1)}_{2k}$$

$$= \int f\left(z^{(2)}_0, z^{(1)}_2, z^{(2)}_2, \dots, z^{(1)}_{2k-2}, z^{(2)}_{2k-2}, z^{(1)}_{2k}\right) \varphi\left(z^{(2)}_{2k}, z^{(1)}_{2k+2}\right) \mathbb{P}\left(Z_0 \in \left(dz^{(1)}_0, dz^{(2)}_0\right)\right)$$
$$S^{\triangle}_{2n|0}\left(z^{(1)}_0, z^{(2)}_0, z^{(1)}_2, z^{(2)}_2\right) S^{\triangle}_{2n|2}\left(z^{(1)}_2, z^{(2)}_2, z^{(1)}_4, z^{(2)}_4\right)$$
$$\dots S^{\triangle}_{2n|2k}\left(z^{(1)}_{2k}, z^{(2)}_{2k}, z^{(1)}_{2k+2}, z^{(2)}_{2k+2}\right) dz^{(1)}_2 dz^{(2)}_2 dz^{(1)}_4 dz^{(2)}_4 \dots dz^{(1)}_{2k+2} dz^{(2)}_{2k+2}$$

Donc, en identifiant $(A.1)$ et $(A.2)$, nous obtenons :

$$\mathbb{E}\left(\varphi\left(U_{2k+1}\right) \mid U_1 = (z^{(2)}_0, z^{(1)}_2), \dots, U_{2k-1} = (z^{(2)}_{2k-2}, z^{(1)}_{2k})\right) = \theta^{\varphi}\left(z^{(2)}_{2k-2}, z^{(1)}_{2k}\right)$$

A.2. L'explication complémentaire pour la formule 4.20

Considérons l'intégrale :

$$\int_{t'_1\in\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4A_2}\left(\left|t'_1-2A_2p_{1,1}x\right|-4M\left|\frac{1+p_{2,1}}{p_{1,1}}\right|\right)^2} dt'_1 = \int_{2A_2p_{1,1}x}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4A_2}\left(t'_1-2A_2p_{1,1}x-4M\left|\frac{1+p_{2,1}}{p_{1,1}}\right|\right)^2} dt'_1$$
$$+ \int_{-\infty}^{2A_2p_{1,1}x} e^{-\frac{1}{4A_2}\left(t'_1-2A_2p_{1,1}x+4M\left|\frac{1+p_{2,1}}{p_{1,1}}\right|\right)^2} dt'_1$$

Par changement variable, nous obtenons :

$$\int_{2A_2p_{1,1}x}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4A_2}\left(t'_1-2A_2p_{1,1}x-4M\left|\frac{1+p_{2,1}}{p_{1,1}}\right|\right)^2} dt'_1 = \int_{-4M\left|\frac{1+p_{2,1}}{p_{1,1}}\right|}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4A_2}u^2} du$$

Et,

$$\int_{-\infty}^{2A_2p_{1,1}x} e^{-\frac{1}{4A_2}\left(t'_1-2A_2p_{1,1}x+4M\left|\frac{1+p_{2,1}}{p_{1,1}}\right|\right)^2} dt'_1 = \int_{-\infty}^{4M\left|\frac{1+p_{2,1}}{p_{1,1}}\right|} e^{-\frac{1}{4A_2}u^2} du$$

Donc,

$$\int_{t'_1\in\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{4A_2}\left(\left|t'_1-2A_2p_{1,1}x\right|-4M\left|\frac{1+p_{2,1}}{p_{1,1}}\right|\right)^2} dt'_1 = \int_{-4M\left|\frac{1+p_{2,1}}{p_{1,1}}\right|}^{4M\left|\frac{1+p_{2,1}}{p_{1,1}}\right|} e^{-\frac{1}{4A_2}u^2} du + \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4A_2}u^2} du$$
$$\leq 8M\left|\frac{1+p_{2,1}}{p_{1,1}}\right| + 2\sqrt{\pi A_2}$$

Considérons l'intégrale :

$$\int_{t'_2:\left|t'_2-2B_2(p_{2,1}x+x')\right|\geq d(\Delta)+4M} e^{-\frac{1}{4B_2}\left(\left|t'_2-2B_2(p_{2,1}x+x')\right|-4M\right)^2} dt'_2 = 2\int_{d(\Delta)}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4B_2}u^2} du$$
$$\leq \frac{4B_2}{d\left(\Delta\right)} e^{-\frac{1}{4B_2}d(\Delta)^2}$$

A.3. L'explication complémentaire pour l'inégalité 4.37

Rappelons la définition de la fonction $T\left(\Delta\right)$:

$$T(\Delta) = \frac{24Ch\sqrt{\tau}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^{1-\iota}\Delta}{6C\sqrt{2\tau}}\right)^2\right)}{\theta^{1-\iota}\Delta\sqrt{\pi}} + \left(8M\frac{\left|1+p_{2,1}\right|}{p_{1,1}} + 2\sqrt{\pi A_2}\right)$$
$$\times \sigma_1\sigma_2p_{1,1}\frac{8B_2e^{\frac{49}{2}M^2\tau+\frac{\tau M}{2}(3M+7)+4\left|M^2(1,-1)\kappa^{-1}(1,-1)^T\right|}}{d(\Delta)}\exp\left(-\frac{1}{4B_2}d(\Delta)^2\right)$$

On voudrait montrer que :

$$\log(T(\Delta)) \underset{\triangle}{\preceq} -\frac{1}{4B_2}\left(\frac{(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}} - 2B_2p_{2,1}\theta^{1-\iota}\right)^2\Delta^2\,.$$

Pour tout Δ assez grand, nous avons :

$$\pm\log(\Delta) - \Delta^2 \underset{\triangle}{\preceq} - \Delta^2$$

$$\begin{aligned}\log(\frac{24Ch\sqrt{\tau}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^{1-\iota}\Delta}{6C\sqrt{2\tau}}\right)^2\right)}{\theta^{1-\iota}\Delta\sqrt{\pi}}) &= \log(\frac{24Ch\sqrt{\tau}}{\theta^{1-\iota}\sqrt{\pi}}) - \log(\Delta) - \frac{1}{2}\left(\frac{\theta^{1-\iota}\Delta}{6C\sqrt{2\tau}}\right)^2 \\ &\underset{\triangle}{\preceq} -\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^{1-\iota}\Delta}{6C\sqrt{2\tau}}\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\log(\left(8M\frac{|1+p_{2,1}|}{p_{1,1}} + 2\sqrt{\pi A_2}\right)\sigma_1\sigma_2 p_{1,1} \\ &\qquad \times \frac{8B_2 e^{\frac{49}{2}M^2\tau + \frac{\tau M}{2}(3M+7)+4\left|M^2(1,-1)\kappa^{-1}(1,-1)^T\right|}}{d(\Delta)}\exp\left(-\frac{1}{4B_2}d(\Delta)^2\right)) \\ &= \log(\left(8M\frac{|1+p_{2,1}|}{p_{1,1}} + 2\sqrt{\pi A_2}\right)\sigma_1\sigma_2 p_{1,1} 8B_2 e^{\frac{49}{2}M^2\tau + \frac{\tau M}{2}(3M+7)+4\left|M^2(1,-1)\kappa^{-1}(1,-1)^T\right|}) \\ &\qquad - \log(d(\Delta)) - \frac{1}{4B_2}d(\Delta)^2 \underset{\triangle}{\preceq} -\frac{1}{4B_2}d(\Delta)^2 \underset{\triangle}{\preceq} -\frac{1}{4B_2}\left(\frac{(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}} - 2B_2 p_{2,1}\theta^{1-\iota}\right)^2\Delta^2\end{aligned}$$

En plus, pour tous h et τ assez grands, nous avons :

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\theta^{1-\iota}\Delta}{6C\sqrt{2\tau}}\right)^2 \leq -\frac{1}{4B_2}\left(\frac{(1-2p_{2,1})}{1+p_{2,1}} - 2B_2 p_{2,1}\theta^{1-\iota}\right)^2\Delta^2$$

Donc, cette inégalité est bien montrée.

Bibliographie

[A.B03] A.Budhiraja. Asymptotic stability, ergodicity, and other asymptotic properties of the nonlinear filter. *Ann.I.H.Poincaré-PR 39*, 6 :919–941, 2003.

[AD99] A.Budhiraja and D.Ocone. Exponential stability in discrete-time filtering for non-ergodic signals. *Stochastic Processes and their Applications*, 82 :245–257, 1999.

[Ata98] R. Atar. Exponential stability for nonlinear filtering of diffusion processes in a noncompact domain. *The annals of Probability*, 26(4) :1552–1574, 1998.

[AVO99] R. Atar, F. Viens, and O.Zeitouni. Robustness of zakai's equation via feynman-kac representations. *Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications*, pages 339–352, 1999.

[BC09] Alan Bain and Dan Crisan. Fundamentals of stochastic filtering. *Springer*, 60 of Stochastic Modelling and Appiled Probability, 2009.

[BD97] A.S. Budhiraja and D.L.Ocone. Exponential stability of discrete time filters for bounded observation noise. *Systems and Control Letters*, 30(4) :185–193, 1997.

[Ben81] V. E. Beneš. Exact finite-dimensional filters for certain diffusions with nonlinear drift. *Stochastics*, 5(1-2) :65–92, 1981.

[CL04] Pavel Chigansky and Robert Liptser. Stability of nonlinear filters in nonmixing case. *The Annals of Applied Probability*, Vol.14, No.4 :2038–2056, 2004.

[CR11] D. Crisan and B. Rozovskiĭ. Introduction in the oxford handbook of nonlinear filtering. *Oxford Univ. Press, Oxford*, pages 1–15, 2011.

[DMG99] P. Del Moral and A. Guionnet. Central limit theorem for nonlinear filtering and interacting particle systems. *Ann.Appl.Probab.*, 9 :275–297, 1999.

[G.K96] G.Kitagawa. Monte carlo filter and smoother for non-gaussian nonlinear state space models. *Journal of computational and Graphical Statistics*, 5(1) :1–25, 1996.

[GM00] Le Gland and Mevel. Exponential forgetting and geometric ergodicity in hidden markov models. *Mathematics of control, signals, and systems*, 13(1) :63–93, 2000.

[GMP99] Da Prato G., M.Fuhrman, and P.Malliavin. Asymptotic ergodicity of the process of conditional law in some problem of nonlinear filtering. *Journal of functional analysis*, 164(2) :356–377, 1999.

[Han09] Ramon Van Handel. Observability and nonlinear filtering. *Probab.Theory Relat.Fields*, 145 :35–74, 2009.

[K.H07] K.Heine. On the stability of the discrete time filter and the uniform convergence of its approximations. *Tampere University of Technology*, PhD Thesis, 2007.

[Kun71] Hiroshi Kunita. Asymptotic behavior of the nonlinear filtering errors of markovs processes. *Journal of Multivariate Analysis 1*, pages 365–339, 1971.

[Kus67] Harol Kushner. Nonlinear filtering : The exact dynamical equations satisfied by the conditional mode. *Automatic control*, IEEE Transactions on Volume 12, Issue 3 :262–267, Jun 1967.

[LO03] François Legland and Nadia Oudjane. A robustification approach to stability and to uniform particle approximation of nonlinear filters : the example of pseudo-mixing signals. *Stochastic Processes and their Applications*, 106 :279–316, 2003.

[LO04] François Legland and Nadia Oudjane. Stability and uniform approximation of nonlinear filters using the hilbert metric and application to particle filters. *The Annals of Applied Probability*, Vol.14, No.1 :144–187, 2004.

[MG01] Pièrre Del Moral and Alice Guionnet. On the stability of interacting processes with applications to filtering and genetic algorithms. *Ann.Inst.H.Poincaré Probab.Statist.*, 37(2) :155-194, 2001.

[Mor04] P.Del Moral. Feynman-kac formulae genealogical and interacting particle systems with applications. *Spinger, New York*, 2004.

[MY08] Roger Mansuy and Marc Yor. Aspects of brownian motion. *Universitex. Springer-Verlag*, Berlin, 2008.

[NMS11] N.Chopin, P.Del Moral, and S.Rubenthaler. Stability of feynman-kac formulae with path-dependent potentials. *Stochastic Processes and their Applications*, 121 :38–60, 2011.

[N.O00] N.Oudjane. Stabilité et approximation particulaires en filtrage non linéaire, application au pistage. *Ph.D.thesis, Université Rennes I*, december 2000.

[Oco99] D. L. Ocone. Asymptotic stability of beneš filters. *Stochastic Anal. Appl.*, 17(6) :1053–1074, 1999.

[OP96] Daniel Ocone and Etienne Pardoux. Asymptotic stability of the optimal filter with respect to its initial condition. *SIAM J. Control Optim.*, 34(1) :226–243, 1996.

[OR05] Nadia Oudjane and Sylvain Rubenthaler. Stability and uniform particle approximation of nonlinear filters in case of non ergodic singals. *Stoch.Anal.Appl*, pages 421–448, 01 may 2005.

[Par] Etienne Pardoux. Filtrage non linéaire et équations aux dérivées partielles stochastiques associées.

[RO97] R.Atar and O.Zeitouni. Exponential stability for nonlinear filtering. *Ann.Inst.Henri Poincaré*, pages 697–725, 1997.

[Sta05] Wilhelm Stannat. Stability of filter equation for a time-dependent signal on $\mathbb{R}^d$. *Applied Mathematics and Optimization*, 52 :39–71, (2005).

[Sta06] Wilhelm Stannat. Stability of the optimal filter via pointwise gradient estimates. *Stochastic partial differential equations and applications*, VII, vol 245 of Lect. Notes pures Appl. Math. :281–293, 2006.

[Sta08] Wilhelm Stannat. On the stability of feynman-kac propagators. *Seminar on Stochastic Analysic, Random Fields and Applications V*, vol 59 of Progr. Probab. :345–362, 2008.

[Str59] R.L Stratonovich. Optimum nonlinear systems which bring about a separation of a signal with constant parameters from noise. *Radiofizika*, 2 :6 :892–901, 1959.

[Str60] R.L Stratonovich. Application of the markov processes theory to optimal filtering. *Radio engineering and Electronic Physics*, 5 :11 :1–19, 1960.

[VH09] R. Van Handel. The stability of conditional markov processes and markov chains in random environments. *Ann.Probab*, 37 :1876–1925, 2009.

[Zak69] Moshe Zakai. On the optimal filtering of diffusion processes. *Z.Wahrscheinlichkeitstheorie verw.Geb*, 11 :230–243, 1969.